

ÁLGEBRA DE BOOLE

POSTULADOS, TEOREMAS E PROPRIEDADES

A aplicação principal da álgebra de Boole é o estudo e a simplificação algébrica de circuitos lógicos. As variáveis booleanas podem assumir apenas dois valores: 0 e 1.

Na realidade uma expressão booleana é uma expressão matemática cujas variáveis são booleanas e o resultado será sempre 0 ou 1.

Consideremos por exemplo: $S = A + B \rightarrow$ Tanto S, como A, como B só podem assumir os valores 0 ou 1.

POSTULADOS: Os postulados são utilizados na minimização bem como na manipulação de expressões lógicas.

1 - POSTULADO DA COMPLEMENTAÇÃO:

Supondo a proposição A
O complemento de A = \bar{A}

Desta forma:

Se $A = 0 \rightarrow \bar{A} = 1$

Se $A = 1 \rightarrow \bar{A} = 0$

Considerando por exemplo os dígitos 1 e 0:

$$\bar{1} = 0$$

$$\bar{0} = 1$$

Através do postulado da complementação podemos estabelecer a identidade da dupla negação:

Se $A = 1$, teremos $\bar{A} = 0$

Se $\bar{A} = 0$, então $\bar{\bar{A}} = 1$

Se $A = 0$, teremos $\bar{A} = 1$

Se $\bar{A} = 1$, então $\bar{\bar{A}} = 0$

Concluimos então:

Quando $A = 1 \rightarrow \bar{\bar{A}} = 1$

Quando $A = 0 \rightarrow \bar{\bar{A}} = 0$

\rightarrow Daí: $\bar{\bar{A}} = A$

$$\bar{\bar{0}} = 0 \text{ e } \bar{\bar{1}} = 1$$

2 - POSTULADO DA ADIÇÃO: Este postulado determina as regras da adição na álgebra de Boole, sendo que o circuito lógico desse postulado é representado pela função OR.

$0 + 0 = 0$	$A + 0 = A$
$0 + 1 = 1$	$A + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$	$A + A = A$
$1 + 1 = 1$	$A + \bar{A} = 1$
Postulado	Teorema

A variável "A" poderá assumir as identidades a seguir:

1) $A + 0 = A$

Se $A = 0$, temos: $0 + 0 = 0$

Se $A = 1$, temos: $1 + 1 = 1$

O resultado será sempre igual a variável A

2) $A + 1 = 1$

Se $A = 0$, temos: $0 + 1 = 1$

Se $A = 1$, temos: $1 + 1 = 1$

O resultado será sempre igual a 1

Sempre que somarmos 1 a qualquer variável, o resultado será sempre igual a 1

3) $A + A = A$

Se $A = 0$, temos: $0 + 0 = 0$

Se $A = 1$, temos: $1 + 1 = 1$

Todas as vezes que somarmos a mesma variável, o resultado será ela mesma

4) $A + \bar{A} = 1$

Se $A = 0$, temos: $0 + 1 = 1$ (pois $\bar{A} = 1$)

Se $A = 1$, temos: $1 + 0 = 1$ (pois $\bar{A} = 0$)

Quando somamos uma variável ao seu complemento o resultado será sempre 1

3 - POSTULADO DA MULTIPLICAÇÃO:

Este postulado determina as regras da multiplicação na álgebra de Boole, sendo que o circuito lógico desse postulado é representado pela função AND.

$0 \cdot 0 = 0$	$A \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$A \cdot 1 = A$
$1 \cdot 0 = 0$	$A \cdot \bar{A} = 0$
$1 \cdot 1 = 1$	$A \cdot \bar{\bar{A}} = A$

Postulado

Teorema

A variável "A" poderá assumir as identidades a seguir:

1) $A \cdot 0 = 0$

Se $A = 0$, temos: $0 \cdot 0 = 0$

Se $A = 1$, temos: $1 \cdot 0 = 0$

Toda a variável multiplicada por zero, terá como resultado zero

2) $A \cdot 1 = A$

Se $A = 0$, temos: $0 \cdot 1 = 0$

Se $A = 1$, temos: $1 \cdot 1 = 1$

Toda a variável multiplicada por 1, terá como resultado a própria variável

3) $A \cdot A = A$

Se $A = 1$, temos: $1 \cdot 1 = 1$

Se $A = 0$, temos: $0 \cdot 0 = 0$

Toda a variável multiplicada por ela própria, terá como resultado a variável

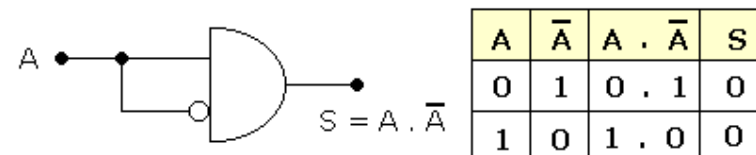
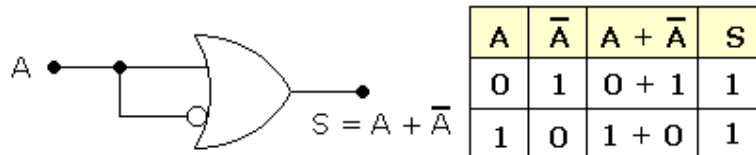
4) $A \cdot \bar{A} = 0$

Se $A = 0$, temos: $0 \cdot 1 = 0$ (pois $\bar{A} = 1$)

Se $A = 1$, temos: $1 \cdot 0 = 0$ (pois $\bar{A} = 0$)

Toda a variável multiplicada por seu complemento, terá como resultado zero

Veja a seguir exemplos para melhor elucidação:



PROPRIEDADES:

- a) comutativa
- b) associativa
- c) distributiva

1 – Propriedade comutativa na adição:

$$A + B = B + A$$

Tomemos como exemplo a expressão: $A + B + C = S$

Aplicando a propriedade comutativa veremos que as expressões se equivalem:

$$A + C + B = S$$

$$C + B + A = S$$

$$B + C + A = S, \text{ e assim por diante}$$

Vejam como fica a montagem da tabela da verdade:

A	B	C	A + C + B	C + B + A	B + C + A	S
0	0	0	0 + 0 + 0	0 + 0 + 0	0 + 0 + 0	0
0	0	1	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0	0 + 1 + 0	1
0	1	0	0 + 0 + 1	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0	1
0	1	1	0 + 1 + 1	1 + 1 + 0	1 + 1 + 0	1
1	0	0	1 + 0 + 0	0 + 0 + 1	0 + 0 + 1	1
1	0	1	1 + 1 + 0	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1	1
1	1	0	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1	1 + 0 + 1	1
1	1	1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1	1

2 – Propriedade comutativa na multiplicação:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Tomemos como exemplo a expressão: $A \cdot B \cdot C = S$

Aplicando a propriedade comutativa veremos que as expressões se equivalem:

$$A \cdot C \cdot B = S$$

$$C \cdot B \cdot A = S$$

$$B \cdot C \cdot A = S, \text{ e assim por diante}$$

Vejam como fica a montagem da tabela da verdade:

A	B	C	A . C . B	C . B . A	B . C . A	S
0	0	0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0
0	0	1	0 . 1 . 0	1 . 0 . 0	0 . 1 . 0	0
0	1	0	0 . 0 . 1	0 . 1 . 0	1 . 0 . 0	0
0	1	1	0 . 1 . 1	1 . 1 . 0	1 . 1 . 0	0
1	0	0	1 . 0 . 0	0 . 0 . 1	0 . 0 . 1	0
1	0	1	1 . 1 . 0	1 . 0 . 1	0 . 1 . 1	0
1	1	0	1 . 0 . 1	0 . 1 . 1	1 . 0 . 1	0
1	1	1	1 . 1 . 1	1 . 1 . 1	1 . 1 . 1	1

3 – Propriedade associativa na adição:

Na expressão $A + B + C = S$, aplicando a propriedade associativa temos várias equivalências, como por exemplo:

$$A + (B + C) \rightarrow (A + B) + C \rightarrow B + (C + A) \dots$$

A tabela da verdade abaixo elucida melhor o conceito:

A	B	C	A + B + C	A + (B + C)	(A + B) + C	B + (C + A)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

4 – Propriedade associativa na multiplicação:

Na expressão $A \cdot B \cdot C = S$, aplicando a propriedade associativa temos várias equivalências, como por exemplo:

$$A \cdot (B \cdot C) \rightarrow (A \cdot B) \cdot C \rightarrow B \cdot (C \cdot A) \dots$$

A tabela da verdade abaixo elucida melhor o conceito:

A	B	C	A . B . C	A . (B . C)	(A . B) . C	B . (C . A)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

5 – Propriedade distributiva na adição:

Considerando a expressão: $A + (BC)$ ou $A + (B.C)$

Obs: normalmente não há necessidade de utilizar o ponto como indicativo da multiplicação.

Aplicando a propriedade distributiva para a adição, teremos:

$$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$$

$$A + (BC) = (A + B)(A + C)$$

A tabela da verdade a seguir mostra a equivalência

A	B	C	A + (BC)			(A + B)(A + C)		
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

6 – Propriedade distributiva na multiplicação:

Considerando a expressão: $A \cdot (B + C)$ ou $A(B + C)$

Obs: normalmente não há necessidade de utilizar o ponto como indicativo da multiplicação.

Aplicando a propriedade distributiva para a multiplicação, teremos:

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A(B + C) = (AB) + (AC)$$

A tabela da verdade a seguir mostra a equivalência

A	B	C	A . (B + C)			(AB) + (AC)		
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1