FIGURAS DE LISSAJOUS

OBJETIVOS:
a) medir a diferença de fase entre dois sinais alternados e senoidais
b) observar experimentalmente, as figuras de Lissajous
c) comparar a frequência entre dois sinais alternados e senoidais

INTRODUÇÃO TEÓRICA

Nos circuitos reativos, isto é, onde são utilizados indutores e capacitores, aparecem tensões senoidais de mesma frequência, porém defasadas entre si de um determinado ângulo.

Tomando-se um sinal como referência, o deslocamento de um segundo sinal em relação ao sinal de referência é o que chamamos de defasagem, que poderá ser positiva (sinal adiantado) ou negativa (sinal atrasado).

A figura abaixo nos mostra dois sinais de amplitudes diferentes mas com a mesma fase.

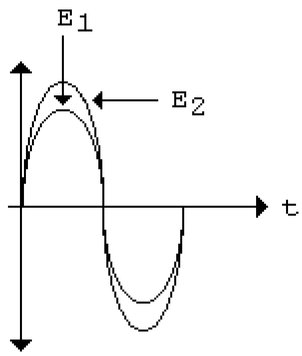


fig. 1

A figura abaixo nos mostra dois sinais com amplitudes iguais, porém defasados entre si.

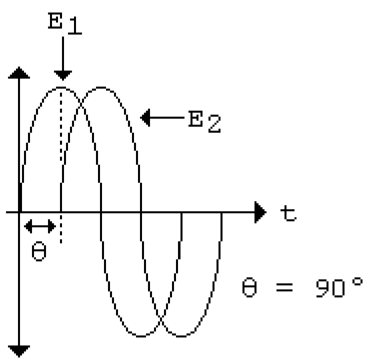


fig. 2

Se considerarmos E_1 como referência, então o sinal E_2 está atrasado em relação a E_1 de um determinado ângulo θ, no caso 90º.

Uma forma bastante utilizada para medir a defasagem entre dois sinais, é a utilização da figura de Lissajous.

Esse método consiste em compor perpendicularmente os dois sinais, injetando-se o sinal de referência na entrada vertical e o outro sinal na entrada horizontal do osciloscópio.

Sendo os dois sinais de mesma frequência, as figuras obtidas na tela do osciloscópio são elipses, cujo formato e inclinação (para esquerda ou para a direita), dependem do ângulo de defasagem entre os dois sinais.

A figura abaixo ilustra essa condição. Um sinal de referência é aplicado na entrada vertical e outro sinal para ser comparado, na entrada horizontal do osciloscópio.

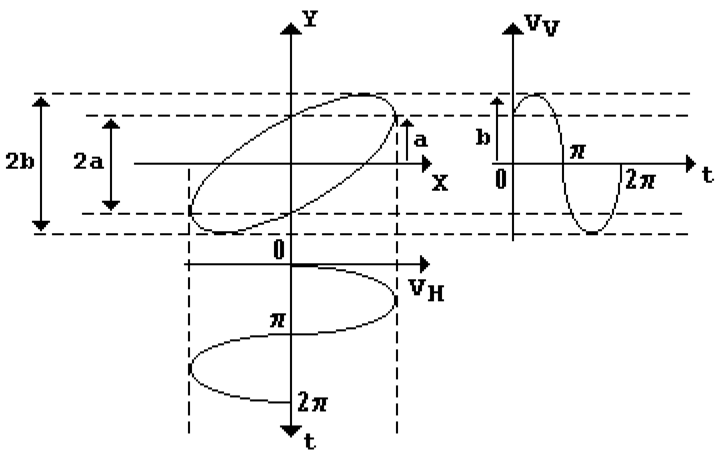


fig. 3

A combinação dos dois sinais resulta então na elipse mostrada.

O sinal V_V obedece a função:

$$V_V\,(t) = Vmax.sen\,(\omega t + \Delta\theta)$$

onde:

Vmax. = b

V_V (t) = a, para t = 0

logo:

a = b sen (ω.0 + $\Delta\theta$)

a = b sen$\Delta\theta$

portanto:

$$sen\ \Delta\theta = a/b$$
$$\Delta\theta = arc\ sen\ a/b$$

Para calcular a defasagem entre os dois sinais baseando-se na elipse obtida na tela do osciloscópio, devemos obter os valores de “a” e “b”, onde “a” representa a distância entre o centro da elipse e o ponto onde esta corta o eixo *y* e “b” representa a distância entre o centro da elipse e o ponto máxima da figura.

Em alguns casos é interessante utilizar os valores 2a e 2b para facilitar os cálculos, uma vez que esses valores representam a parte superior e inferior da elipse a partir do eixo *x*.

Podemos então utilizar a fórmula:

$$\Delta\theta = \text{arc sen } 2a/2b$$

<u>Exemplo:</u>

Supondo que na figura 3, 2a seja igual a 4 divisões e 2b seja igual a 6.

$$\Delta\theta = \text{arc sen } 4/6 = 41{,}81^o$$

As figuras a seguir ilustram alguns formatos de elipses em virtude das defasagens entre dois sinais quaisquer, com a mesma frequência.

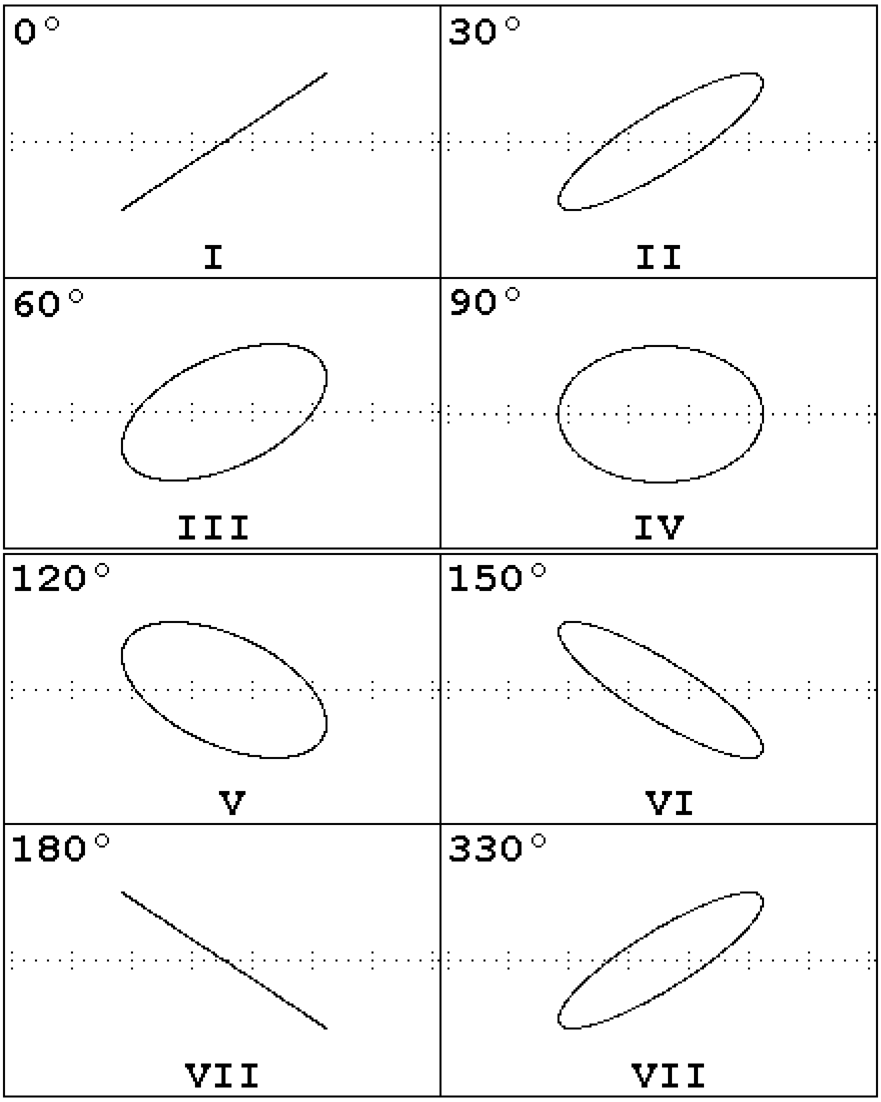


fig. 4

É interessante notar que as figuras se repetem acima de ângulos de 90º que estejam nos 2º e 3º quadrantes, porém invertidas.

Compare por exemplo as figuras II e VI que obedecem a mesma inclinação, porém, estão invertidas. Neste caso, 180º - 150º = 30º.

Quando se tratar do 4º quadrante, a figura resultante será a mesma com relação a ângulos de 0 a 90º. Compare as figuras II e VII. Neste caso, 360º - 330º = 30º.

Quando comparamos frequências, as figuras de Lissajous são mais complicadas e para a determinação matemática entre as frequências dos sinais utiliza-se o método das tangências ou o método das secantes.

Na figura a seguir temos a composição de dois sinais com frequências diferentes mas com fases iguais, sendo um na vertical (referência) com uma determinada frequência e outro na horizontal com o dobro da frequência.

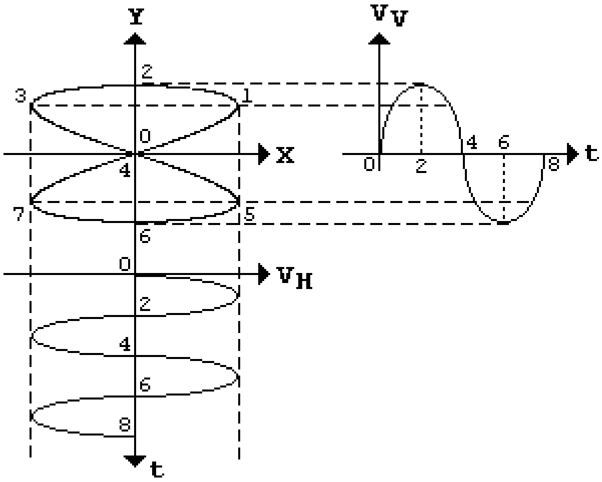


fig. 5

Para determinar a relação de frequências, traça-se uma tangente horizontal (T_H) e uma tangente vertical (T_V). Conta-se o número de tangências horizontais (N_H) e o número de tangências verticais (N_V). Desta forma, a relação das frequências será dada por:

$$\boxed{\frac{F_V}{F_H} = \frac{N_H}{N_V} \quad \therefore \quad F_H = \frac{F_V N_V}{N_H}}$$

onde:

F_V é a frequência vertical do sinal
F_H é a frequência horizontal do sinal
N_V é o número de tangências na vertical
N_H é o número de tangências na horizontal

Para a figura a seguir:

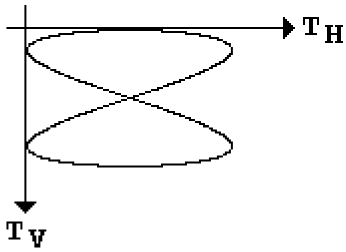


fig. 6

Temos duas tangentes no sentido vertical e uma tangente no sentido horizontal.

Vejamos um exemplo.

Suponha que seja aplicado na entrada vertical (referência) do osciloscópio um sinal cuja frequência seja de 250Hz e outro sinal de frequência desconhecida na entrada horizontal do osciloscópio, ambos com a mesma fase, sendo obtida na tela do osciloscópio a figura mostrada a seguir. Pergunta-se: qual é a frequência desconhecida?

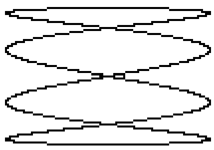


fig. 7

Aplicando o método das tangentes, resulta na figura abaixo:

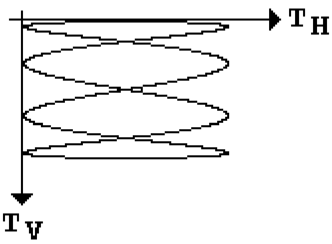


fig.8

Como ocorrem 4 tangências na vertical e apenas uma tangência na horizontal, temos:

$$F_H = 250Hz \times 4 / 1$$

portanto: F_H = 1.000Hz (1kHz), ou seja, F_H = 1kHz

Outro exemplo: Dada a figura a seguir, sabe-se que a frequência aplicada na entrada vertical (referência) do osciloscópio é de 1kHz. Qual a frequência aplicada na entrada horizontal?

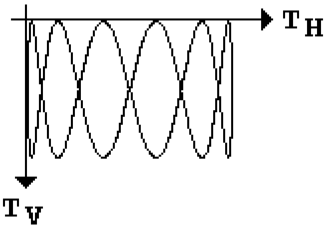


fig. 9

Neste caso ocorrem 6 tangências na horizontal e apenas uma tangência na vertical.

$$F_H = 1kHz \times 1 / 6$$
$$F_H = 166,67Hz$$

Veja a seguir algumas figuras de Lissajous obtidas a partir da comparação de duas frequências diferentes, porém com fases iguais.

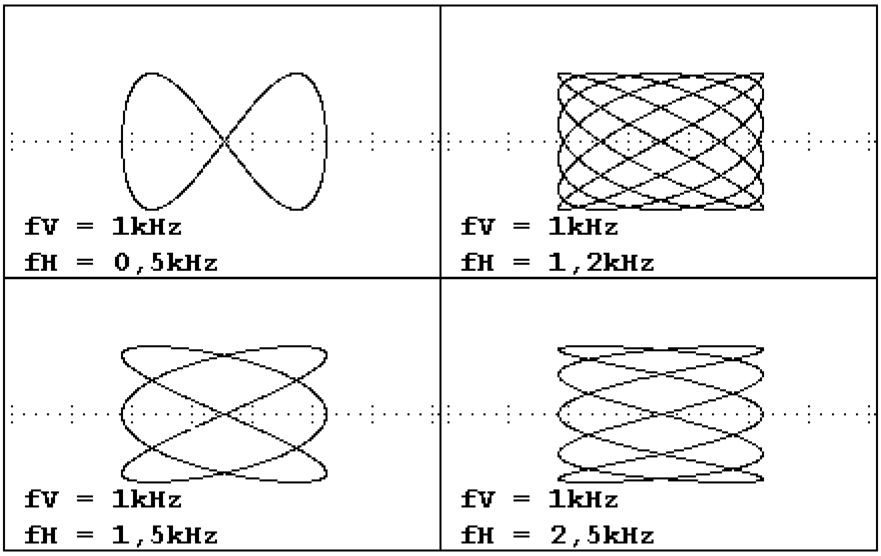


fig. 10

A figura abaixo nos mostra a comparação entre duas frequências nas mesmas condições acima, porém com sinais defasados entre si em 60º.

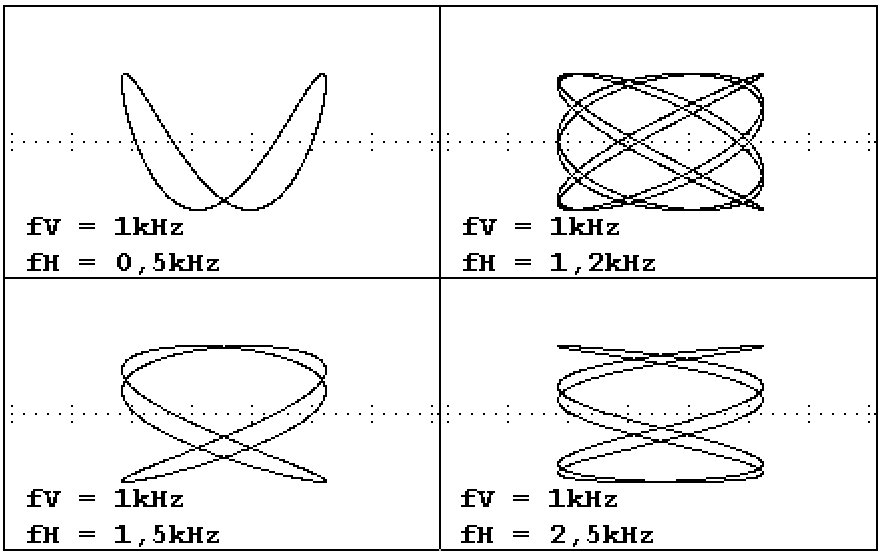


fig. 11

Para determinar uma frequência desconhecida, podemos utilizar também o método das secantes, cuja relação é idêntica ao método das tangentes.

A única observação a ser feita é que a secante não deve cortar pontos da figura de Lissajous onde se sobrepõem duas linhas.

Tomemos como exemplo uma das figuras de Lissajous mostrada acima (fig. 11), onde a frequência vertical (referência) é 1kHz e a frequência desconhecida é 1,5kHz.

Aplicando-se o método das tangentes resultará na figura 12, onde:
onde:

S_V = número de linhas cortadas na vertical
S_H = número de linhas cortadas na horizontal

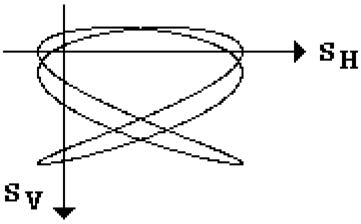


fig. 12

Observa-se na figura que são cortadas 6 linhas na vertical e 4 linhas na horizontal.
Desta forma temos:

$$F_H = 1.000 \text{ x } 6/4$$
$$F_H = 6.000/4 = 1.500\text{Hz } (1{,}5\text{kHz})$$

Outro exemplo: Suponha que um sinal de referência de 1kHz e um sinal de frequência desconhecida, com fases diferentes, produzam a figura de Lissajous mostrada abaixo. Determine a frequência do sinal desconhecido pelo método das secantes.

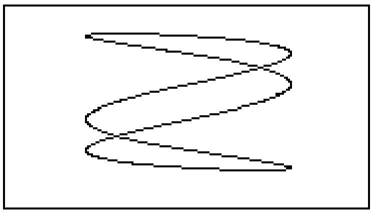


fig. 13

Aplicando o método das secantes, teremos:

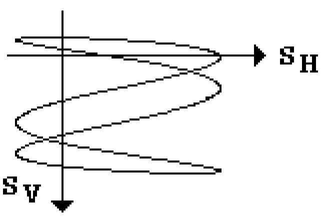


fig. 14

Então:

$$S_V = 6 \text{ e } S_H = 2$$
$$F_H = 1.000 \text{ x } 6/2$$
$$F_H = 6.000/2 = 3.000\text{Hz } (3\text{kHz})$$

PARTE PRÁTICA

MATERIAIS NECESSÁRIOS
1 - Osciloscópio
1 - Gerador de funções
1 - Módulo de ensaios ETT-1

MEDIDA DE FREQUÊNCIA

1 - Monte o circuito abaixo.

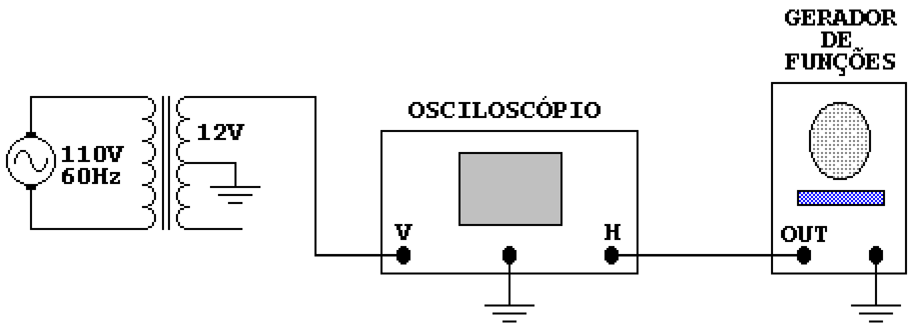


fig. 15

OBS: Utilize a saída $12V_{AC}$ do módulo de ensaios ETT-1, em lugar do transformador. Sendo o transformador alimentado na rede cuja frequência é de 60Hz, teremos no secundário a mesma frequência.
2 - Ajuste o gerador de funções para obter uma senóide, na frequência de 60Hz.

3 - Ligue o módulo de ensaios, o osciloscópio e o gerador de funções na rede e, através dos ajustes no osciloscópio e no gerador de funções procure obter uma imagem que ocupe aproximadamente 80% da tela do osciloscópio.

4 - Varie a frequência do gerador de funções de acordo com a tabela 1 (30, 120, 150 180 e 300Hz) e observe a figura de Lissajous na tela do osciloscópio para cada uma das frequências do gerador. Anote o número de tangências vertical e horizontal.

5 - Calcule a frequência utilizando as relações: $F_V/F_H = N_H/N_v$ e anote na tabela 1.

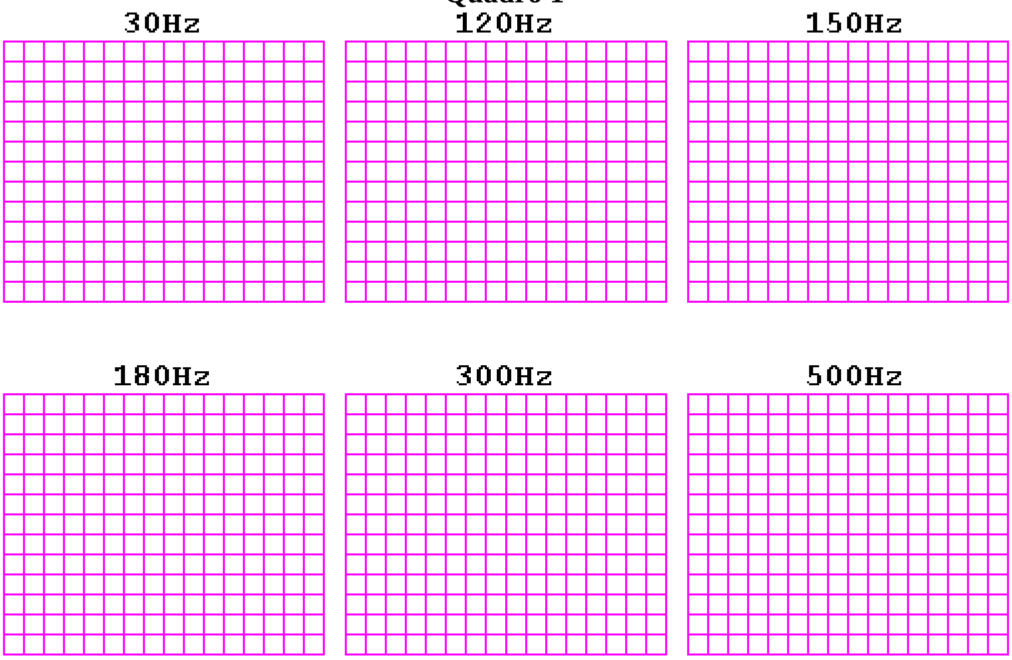
Tabela 1

F (Hz)	Nº de tangências		Freqüência calculada
	N_V	N_H	
30			
120			
150			
180			
300			
500			

6 - Desenhe no quadro 1 a seguir, as figuras observadas na tela do osciloscópio para cada uma das frequências.

Observe atentamente a posição das figuras em relação aos eixos X e Y.

Quadro 1



MEDIDA DE DEFASAGEM

1 - Monte o circuito a seguir.

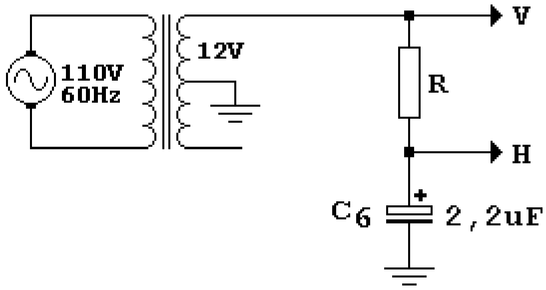


fig. 16

2 - Ligue “V” na entrada vertical do osciloscópio e “H” na entrada horizontal.

3 - Ligue o osciloscópio e o treinador lógico e observe a figura mostrada na tela.

4 - Complete a tabela 2 para cada resistor listado na mesma, e anote os valores *2a* e *2b*.

Tabela 2

Capacitor: 2,2μF

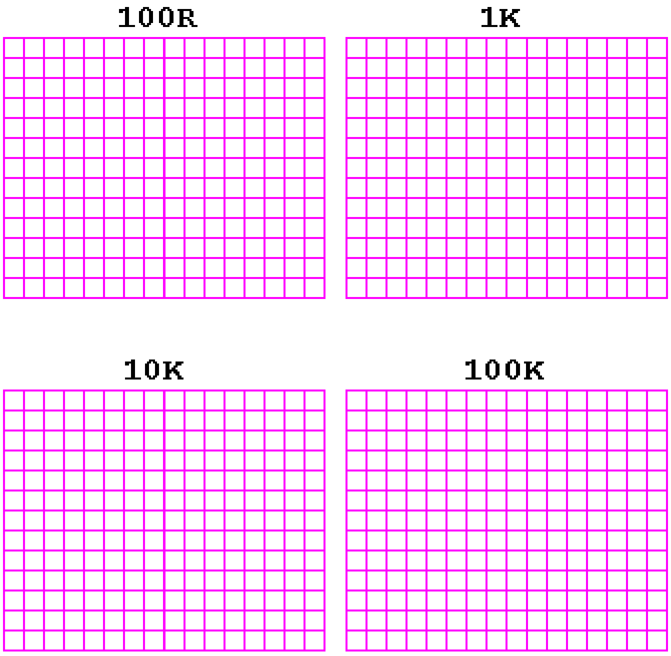
R	Valores medidos		Defasagem
	2a	2b	
100R			
1k			
10k			
100k			

5 - Utilizando os valores *2a* e *2b* medidos, calcule a defasagem e anote na tabela 2.

Utilize a relação Δθ = arc sen 2a/2b

6 - Desenhe no quadro 2 a seguir as formas de onda observadas na tela do osciloscópio, para cada valor de resistor do circuito.

Quadro 2



QUESTÕES:

1 - Qual é o procedimento para se obter uma figura de Lissajous em um osciloscópio?

2 - Cite as aplicações práticas das figuras de Lissajous.

3 - O que é defasagem?

4 - A figura a seguir mostra a figura de Lissajous resultante da defasagem entre dois sinais de mesma frequência. Calcule a defasagem.

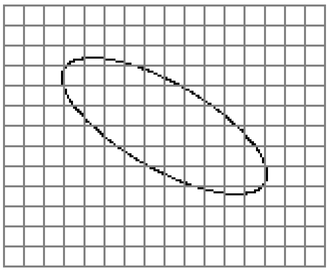


fig. 17

5 - A figura abaixo mostra a figura de Lissajous resultante da diferença de frequências entre dois sinais.

Sabe-se que o sinal de referência aplicado na entrada vertical do osciloscópio é de 2kHz. Calcule a frequência desconhecida.

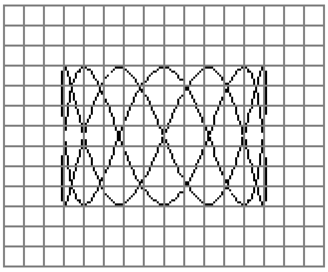
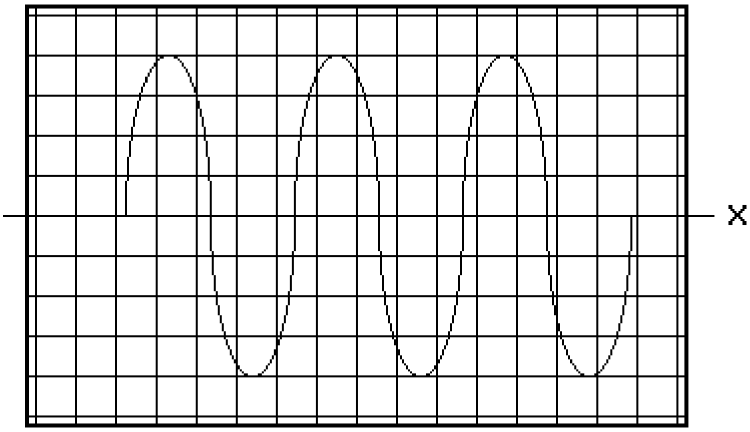


fig. 18

6 - A tela de um osciloscópio mostra a forma de onda a seguir:



Sabe-se que o amplificador vertical está calibrado para 50V/div e o amplificador horizontal em 2ms/div.

Pede-se:

1. Tensão de pico a pico ____________________
2. Tensão de pico _________________________
3. Tensão eficaz ou rms ____________________
4. Valor médio da tensão ___________________
5. Frequência ______________________________