ANÁLISE DE REDES DC

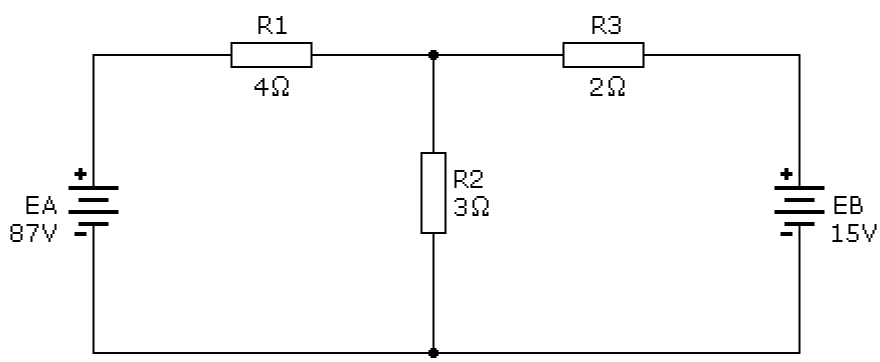
Métodos: Corrente nas malhas, tensão nodal e superposição

ANÁLISE DE UMA REDE DC ATRAVÉS DA CORRENTE NAS MALHAS:

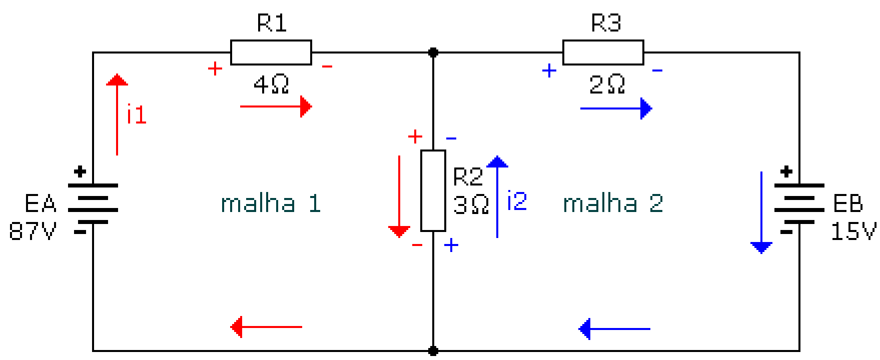
No circuito a seguir utilizaremos as Leis de Kirchhoff para sua resolução e levantamento energético das correntes e tensões em cada um dos seus resistores.

Trata-se de um circuito com duas malhas e duas baterias, onde adotaremos como regras de polarização o sentido horário da corrente.

Exercício: calcular no circuito abaixo as tensões e correntes nos resistores. Efetuar o levantamento energético usando LKT e LKC:



Polarizando o circuito:



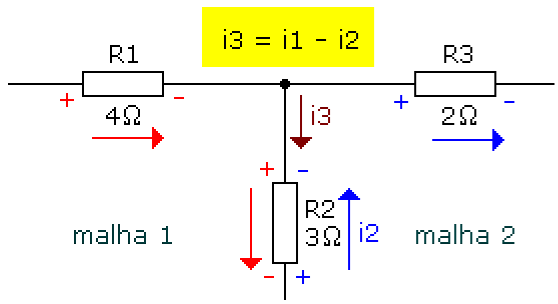
OBS:

Na malha 1 temos a corrente i1

Na malha 2 temos a corrente i2

Pelo resistor R2 circulam as correntes i1 e i2 porém em sentidos opostos, devido a polarização adotada no circuito, uma vez que as duas malhas foram polarizadas adotando o sentido horário da corrente.

Denominaremos essa corrente como i3, considerando-a como saindo da junção da junção.



Lembrar que as correntes que entram no nó ou junção recebem a polaridade (+) e as que saem a polaridade (-).

$$i1 - i2 - i3 = 0 \Rightarrow - i3 = - i1 + i2 \Rightarrow i3 = i1 - i2$$

Escrevendo as equações:

Malha 1	**Malha 2**
EA - 4i1 - 3i1 + 3i2 = 0 87 - 4i1 - 3i1 + 3i2 = 0 87 - 7i1 + 3i1 = 0 - 7i1 + 3i1 = - 87 7i1 - 3i2 = 87 (I)	- EB - 3i2 + 3i1 - 2i2 = 0 - 15 - 3i2 + 3i1 - 2i2 = 0 - 15 - 5i2 + 3i1 = 0 - 5i2 + 3i1 = 15 (II)

Temos então um sistema com 2 equações e duas incógnitas (i1 e i2).

Resolvendo o sistema:

$$7i1 - 3i2 = 87$$
$$3i1 - 5i2 = 15$$

$$\begin{aligned} 7i1 - 3i2 &= 87 \quad (\times 5) \\ 3i1 - 5i2 &= 15 \quad (\times -3) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 35i1 - \cancel{15i2} &= 435 \\ - 9i1 + \cancel{15i2} &= - 45 \\ \hline 26i1 \quad &= 390 \end{aligned}$$

$$i1 = \frac{390}{26} = 15A$$

Substituindo i1 em (I)

$$7i1 - 3i2 = 87 \ (I)$$

$$7(15) - 3i2 = 87$$
$$105 - 3i2 = 87$$

$$-3i2 = 87 - 105$$
$$-3i2 = -18$$

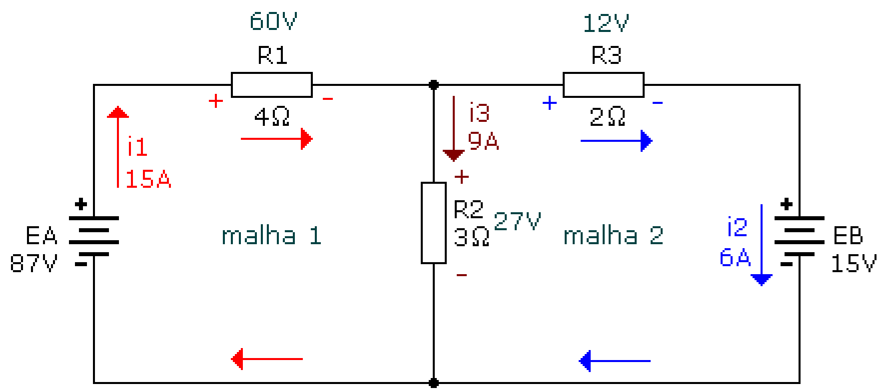
$$i2 = \frac{-18}{-6} = 6A$$

Calculando i3:

- i3 + i1 - i2 ➔ i3 = i1 - i2 = 15 - 6 = 9A (saindo da junção)

Levantamento energético:

LKT



Queda de tensão nos resistores:

VR1 = R1 . i1 = 4 . 15 = 60V
VR2 = R2 . i3 = 3 . 9 = 27V
VR3 = R3 . i2 = 2. 6 = 12V

Aplicando as equações nas malhas:

Malha 1: EA - VR1 - VR2 = 0

⇨ 87 - 60 - 27 = 0

Malha 2: - EB - (- VR2) - VR3 = 0

⇨ - 15 + 27 - 12 = 0

Malha externa: EA - VR1 - VR3 - EB = 0

⇨ 87 - 60 - 12 - 15 = 0

LKC

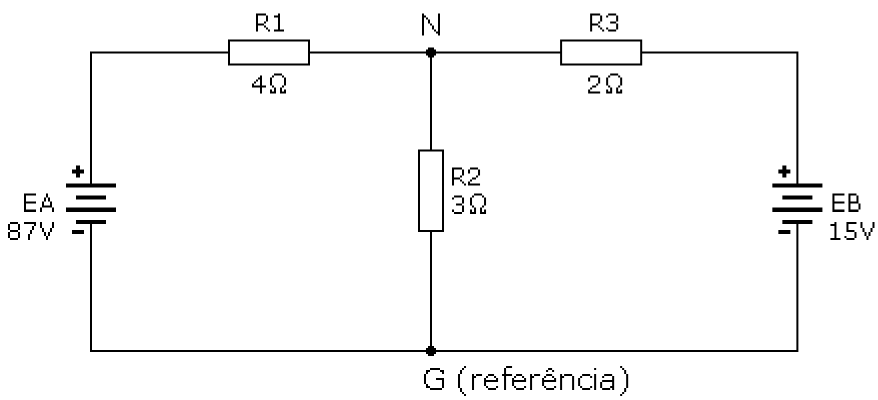
Na junção (nó) entre os resistores R1, R2 e R3, temos:
A corrente i1 entra na junção enquanto as correntes i2 e i3 saem da junção.

i1 - i2 - i3 = 0

15 - 6 - 9 = 0

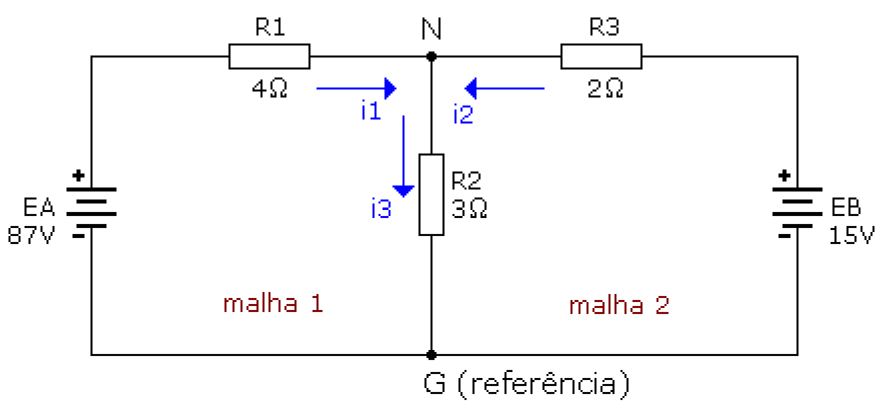
ANÁLISE DE UMA REDE DC ATRAVÉS DA TENSÃO NODAL:

Vamos resolver o mesmo exercício, porém agora analisando as correntes nos "nós", daí o nome de tensão nodal, uma vez que na junção formada pelos resistores R1, R2 e R3 existe também uma tensão. Denominaremos esse ponto de "N".



Daí então, N e G são os nós principais.

Vamos polarizar o circuito (as duas malhas), levando-se em consideração o sentido convencional da corrente: do (+) para o (-).



As correntes i1 e i2 entram no "nó", enquanto a corrente i3 sai (suposição adotada para a corrente i3)

$$i1 + i2 - i3 = 0$$

$$i3 = i1 + i2$$

Para calcular as correntes, devemos conhecer a tensão nodal:

$$i3 = \frac{VN}{R2}; \qquad i1 = \frac{VA - VN}{R1};$$

$$i2 = \frac{VB - VN}{R3}$$

Calculando VN (tensão nodal). Lembrando que VN é a tensão nos extremos do resistor R2 (pontos N e G).

$$\frac{VN}{R2} = \frac{VA - VN}{R1} + \frac{VB - VN}{R3}$$

$$\frac{VN}{3} = \frac{87 - VN}{4} + \frac{15 - VN}{2} \Rightarrow mmc = 12$$

$$4(VN) = 3(87\text{-}VN) + 6(15\text{-}VN)$$

$$4VN = 261 - 3VN + 90 - 6VN$$

$$13VN = 351$$

$$VN = \frac{351}{13} = 27V$$

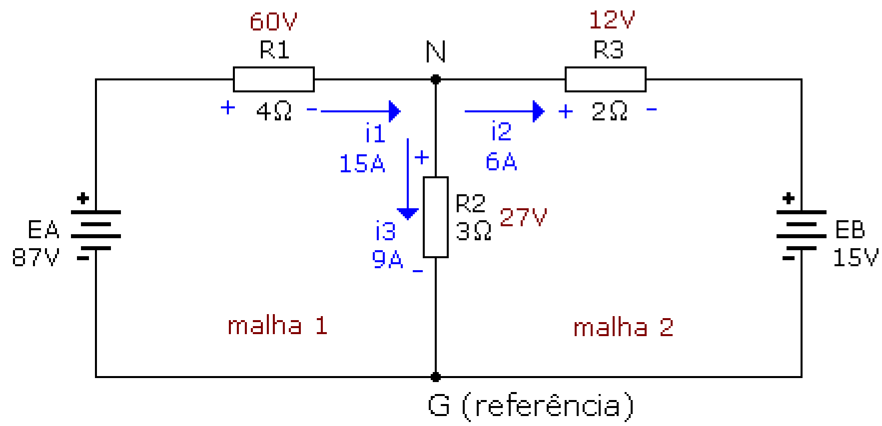
Assim:

$$i3 = \frac{VN}{R2} = \frac{27}{3} = 9A$$

$$i1 = \frac{VA - VN}{R1} = \frac{87 - 27}{4} = \frac{60}{4} = 15A$$

$$i2 = \frac{VB - VN}{R3} = \frac{15 - 27}{2} = \frac{-12}{6} = -6A$$

Como a corrente i2 = - 6A, então o seu sentido deve ser invertido, passando a sair do nó ao invés de entrar.



Partindo do enunciado da LKC, em que a soma das correntes que entram em um nó é igual a soma das correntes que saem, então:

$$i1 = i2 + i3$$
$$15 = 6 + 9$$

$$15A\ (\text{entra}) = 15A\ (\text{sai})$$

Ou pela equação:

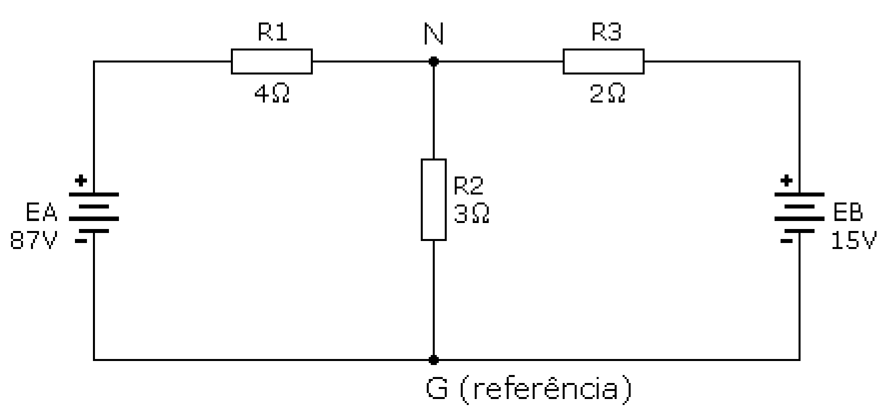
$$i1 - i2 - i3 = 0$$
$$i1 = i2 + i3$$
$$15 = 6 + 9$$

$$15A = 15A$$

ANÁLISE DE UMA REDE DC ATRAVÉS DA SUPERPOSIÇÃO:

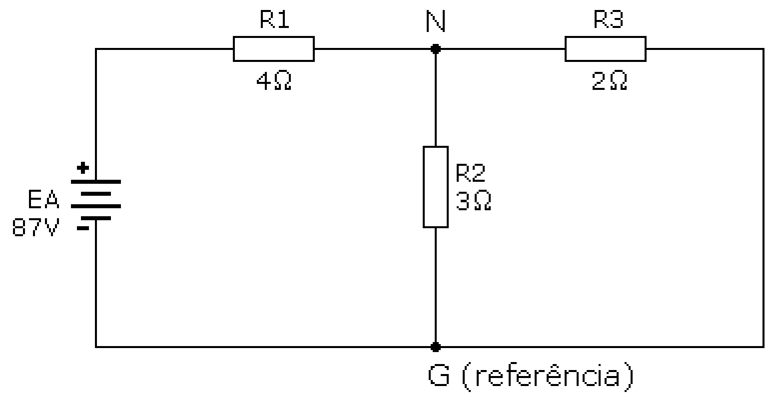
Outra forma de analisar uma rede DC é através do método da *superposição*, onde devem estar presentes também os conhecimentos e fundamentos teóricos da LKT e LKC.

Tomemos como exemplo o mesmo circuito:



Ao utilizar o método da superposição para analisar uma rede DC, devemos levar em consideração o efeito de cada uma das fontes (EA e EB) separadamente.

1. efeito de EA



Elimina-se EB, colocando um curto na mesma.

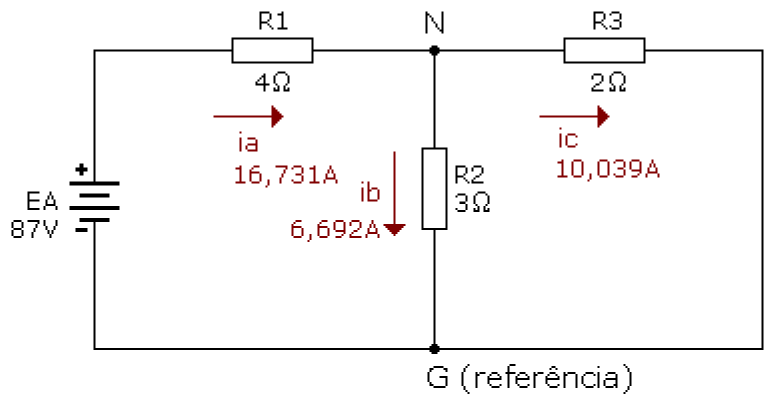
Calcula-se a corrente e seu sentido em cada um dos resistores (adotaremos o sentido convencional)

Teremos então: R2//R3 + R1 ➔ R2//R3 = $\frac{3.2}{3+2} = \frac{6}{5} = 1{,}2\Omega$

A resistência total (ou equivalente) vista por EA = 4 + 1,2 = 5,2Ω

A corrente total, a qual estamos referindo como "ia" será:

$$\frac{EA}{RT} = \frac{87}{5{,}2} = 16{,}731A$$



$$ib = \frac{16{,}731.2}{2+3} = \frac{33{,}462}{5} = 6{,}692A$$

$$ic = \frac{16{,}731.3}{2+3} = \frac{50{,}193}{5} = 10{,}039A$$

2. efeito de EB

Elimina-se EA, colocando um curto na mesma.

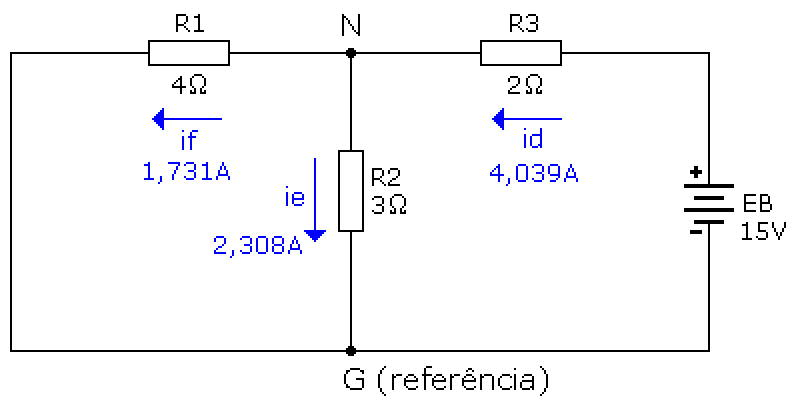
Calcula-se a corrente e seu sentido em cada um dos resistores (adotaremos o sentido convencional)

Teremos então: R1//R2 + R3 ➔ R1//R2 = $\frac{4.3}{4+3} = \frac{12}{7} = 1{,}714\Omega$

A resistência total (ou equivalente) vista por EB = 2 + 1,714 = 3,714Ω

A corrente total, a qual estamos referindo como "id" será:

$$\frac{EB}{RT} = \frac{15}{3{,}714} = 4{,}039A$$



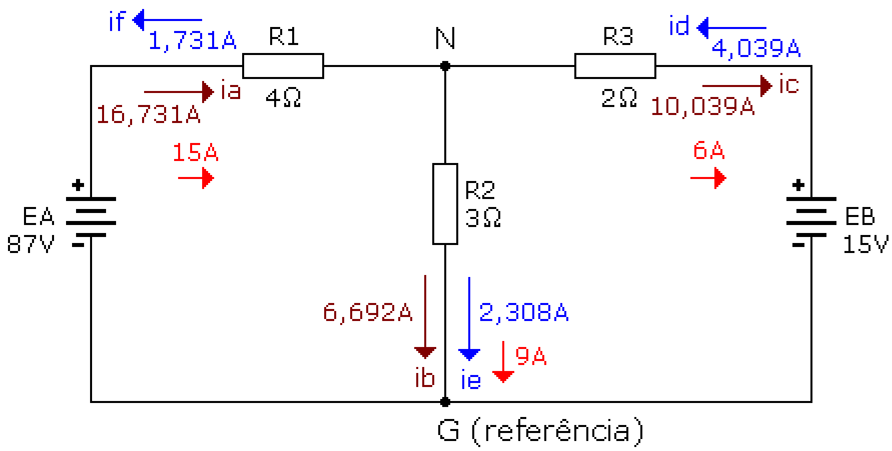
$$ie = \frac{4{,}039.4}{4+3} = \frac{16{,}156}{7} = 2{,}308A$$

$$if = \frac{4{,}039.3}{4+3} = \frac{12{,}117}{7} = 1{,}731A$$

Devemos fazer a sobreposição das duas malhas.

Correntes representadas por setas no mesmo sentido somam-se, enquanto que deverão ser subtraídas as correntes representadas por setas opostas.

A figura a seguir mostra o resultado final.

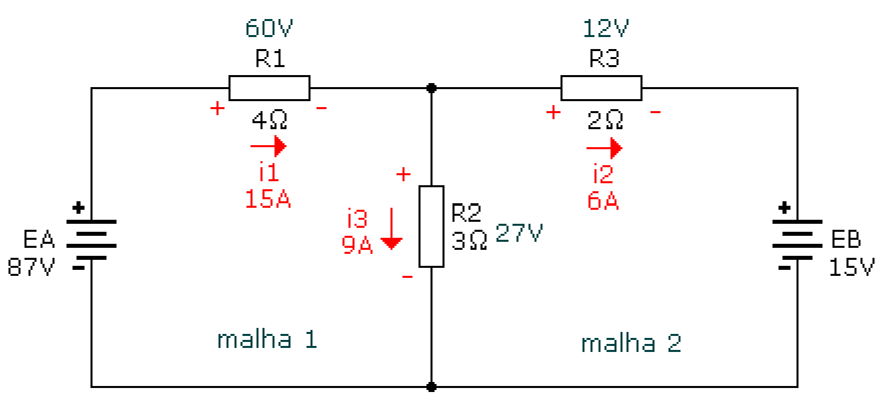


Observe que a corrente de 15A entra na junção e as correntes de 6A e 9A saem da junção, o que satisfaz plenamente o conceito de LKC.

CONCLUSÃO: em qualquer um dos métodos que for adotado para a análise, o resultado deverá ser o mesmo.

Veja na figura abaixo o levantamento energético do circuito, segundo LKT (lei das malhas)

Observe que a polarização final obedece ao sentido das setas, ou seja, a entrada da seta representa o pólo (+).



Você deve ter observado que para o mesmo circuito foram utilizados os 3 métodos propostos nesta apostila para a sua análise.

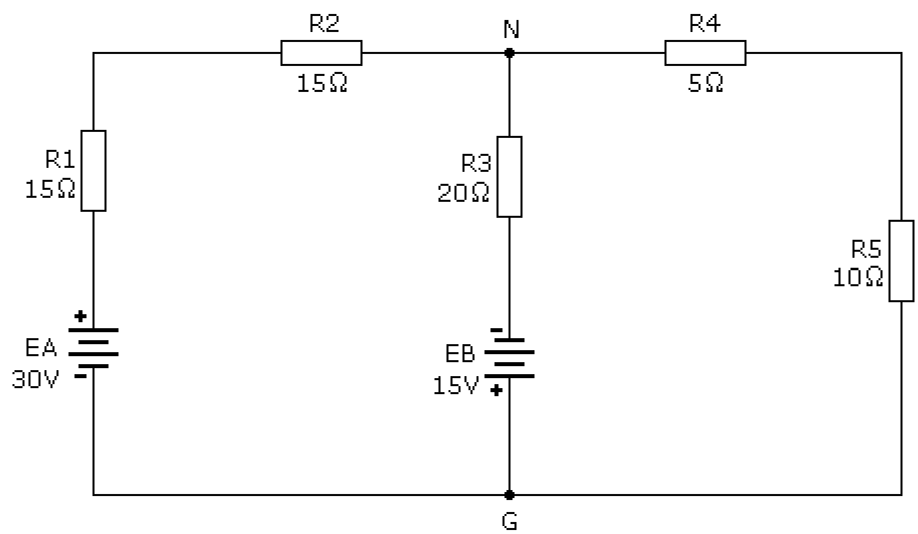
1. Análise de correntes nas malhas
2. Análise de tensão nodal
3. Superposição

O mais importante é que os resultados são iguais. A escolha do método de análise não muda os resultados finais.

EXERCÍCIO RESOLVIDO PARA FIXAÇÃO DE CONCEITO, USANDO OS TRÊS MÉTODOS DE ANÁLISE

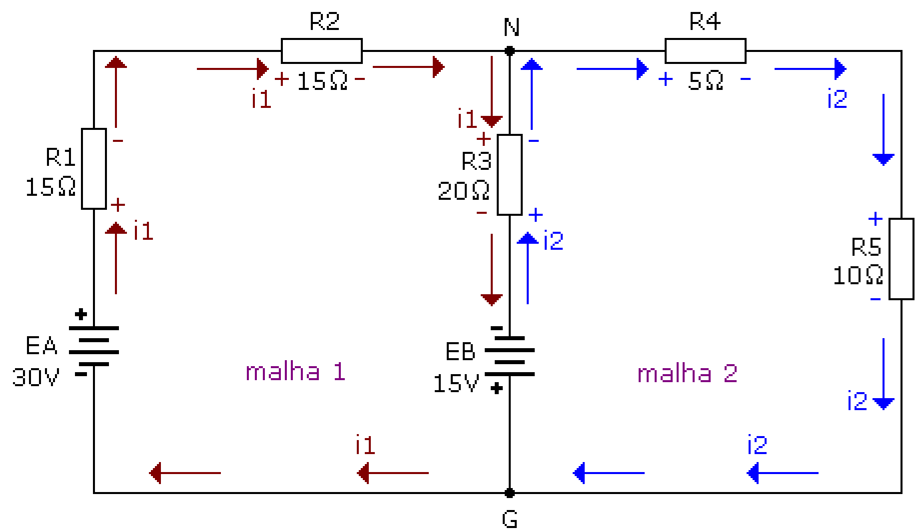
Finalmente, para fixar melhor os conceitos apresentados, faremos outro exercício usando os três métodos de análise.

No circuito abaixo, calcule a tensão e a corrente nos resistores:



MÉTODO DA CORRENTE NAS MALHAS:

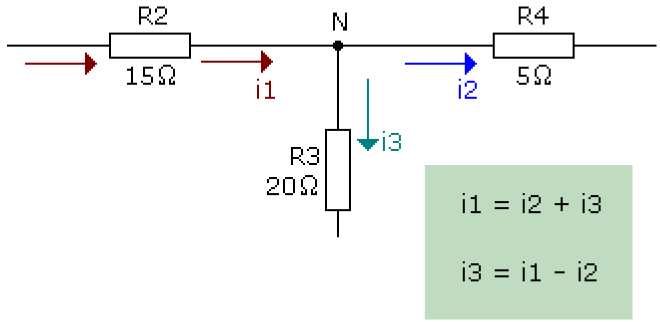
Polarizando o circuito (sentido horário):



Definiremos a corrente i3 saindo do nó:

$$i1 - i2 - i3 = 0$$
$$- i3 = -i1 + i2 \quad .(-1)$$

$$i3 = i1 - i2$$



Escrevendo as equações:

Malha 1:

$30 - 15i1 - 15i1 - 20i1 - (-20i2) - (-15) = 0$

$30 - 50i1 + 20i2 + 15 = 0$

$45 - 50i1 + 20i2 = 0$

$- 50i1 + 20i2 = - 45$ (I)

Malha 2:

$- 15 - 20i2 - (-20i1) - 5i2 - 10i2 = 0$

$- 15 - 20i2 + 20i1 - 5i2 - 10i2 = 0$

$- 15 + 20i1 - 35i2 = 0$

$20i1 - 35i2 = 15$ (II)

Resolvendo o sistema:

$- 50i1 + 20i2 = - 45\ (x7) = - 350i1 + 140i2 = - 350$

$20i1 - 35i2 = 15\ (x4) = 80i1 - 140i2 = 60$

$$\begin{array}{rcr} - 350i1 + \cancel{140i2} & = & - 350 \\ 80i1 - \cancel{140i2} & = & 60 \\ \hline - 270i1 \qquad & = & - 255 \end{array}$$

$$i1 = \frac{-255}{-270} = 944{,}44mA$$

Substituindo i1 em (II)

$20(0{,}94444) - 35i2 = 15$

$18{,}888 - 35i2 = 15$

$- 35i2 = 15 - 18{,}888$

$- 35i2 = - 3{,}888$ (arredondando para 3,889)

$$i2 = \frac{-3{,}889}{-35} = 111{,}11mA$$

Calculando i3

$$i3 = i1 - i2 = 944{,}44 - 111{,}11 = 833{,}33mA$$

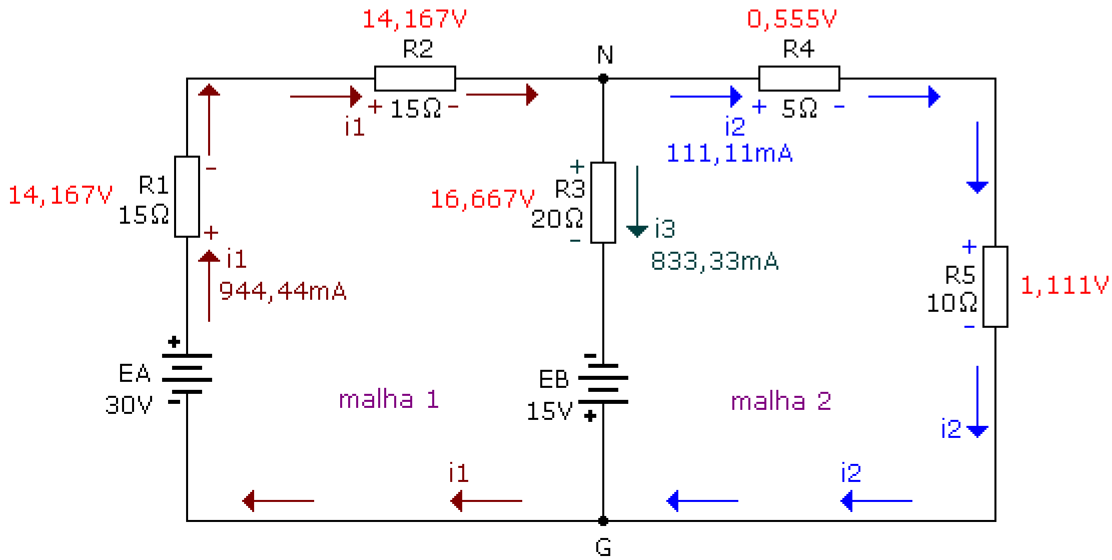
Temos então definidas as 3 correntes:

i1 = 944,44mA	**i2 = 111,11mA**	**i3 = 833,33mA**

Resta agora fazer o levantamento energético do circuito, aplicando LKT:

Queda de tensão nos resistores:

VR1 = 15 . 0,94444 = 14,167V
VR2 = 15 . 0,94444 = 14,167V
VR3 = 20 . 0,83333 = 16,667V
VR4 = 5 . 0,11111 = 0,555V
VR5 = 10 . 0,11111 = 1,111V



Escrevendo as equações:

Malha 1:

EA - VR1 - VR2 - VR3 + EB = 0

30 - 14,167 - 14,167 - 16,667 + 15 = - 0,001 ≈ 0

Malha 2:

- EB + VR3 - VR4 - VR5 = 0

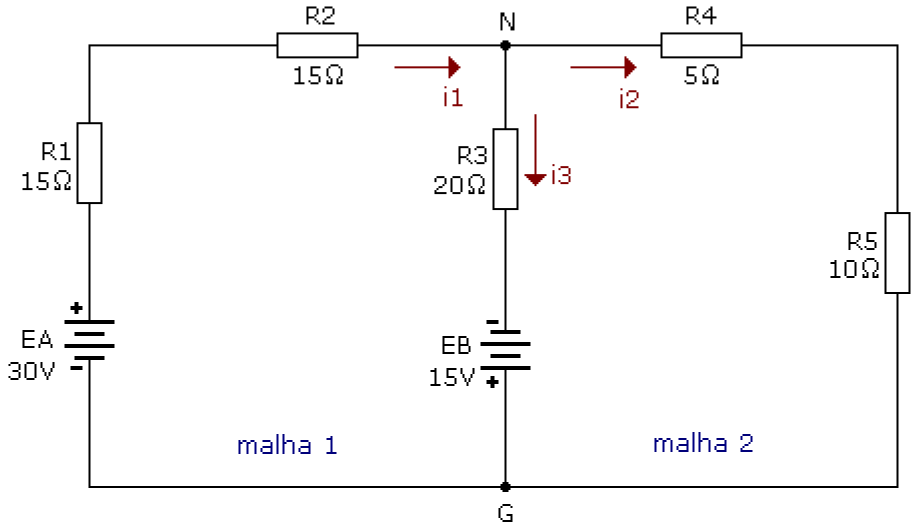
- 15 + 16,667 - 0,555 - 1,111 = 0,001 ≈ 0

Malha externa:

EA - VR1 - VR2 - VR4 - VR5 = 0

30 - 14,167 - 14,167 - 0,555 - 1,111 = 0

MÉTODO DA TENSÃO NODAL:



Considerando i1 entrando e i2 e i3 saindo do nó, teremos a equação:

$$i1 = i2 + i3$$

$$i1 = \frac{VA - VN}{15+15} = \frac{VA - VN}{30} = \frac{30 - VN}{30}$$

$$i2 = \frac{VN}{10+5} = \frac{VN}{15}$$

$$i3 = \frac{VB + VN}{20} = \frac{15 + VN}{20}$$

$$\frac{30 - VN}{30} = \frac{VN}{15} + \frac{15 + VN}{20} = \frac{60 - 2VN = 4VN + 45 + 3VN}{60}$$

$$60 - 45 = 3VN + 2VN + 4VN \rightarrow 15 = 9VN$$

$$VN = \frac{15}{9} = 1{,}667V$$

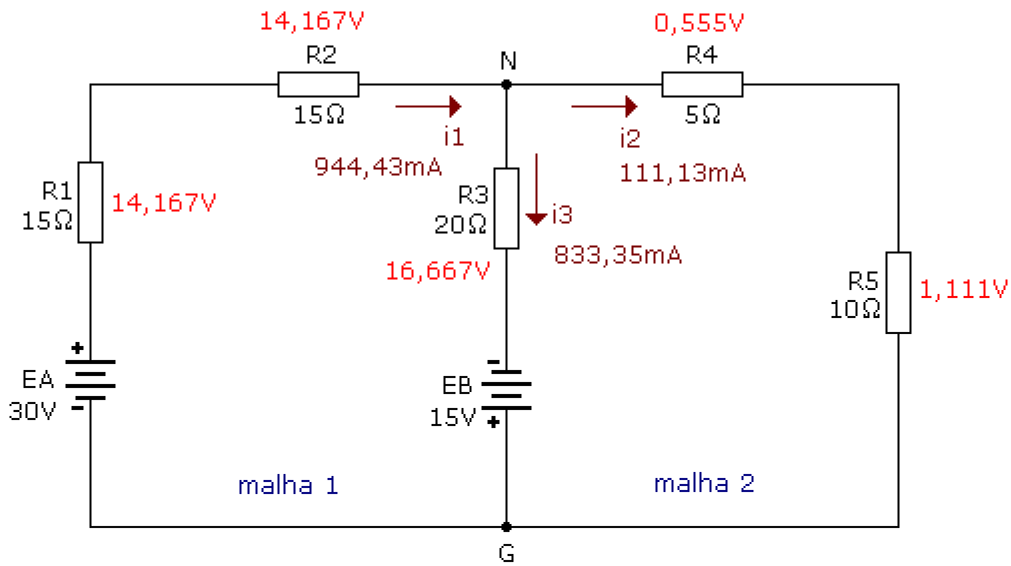
Calculando as correntes:

$$i1 = \frac{30 - VN}{30} = \frac{30 - 1{,}667}{30} = \frac{28{,}333}{30} = 944{,}43mA$$

$$i2 = \frac{VN}{15} = \frac{1{,}667}{15} = 111{,}13mA$$

$$i3 = \frac{15 + VN}{20} = \frac{15 + 1{,}667}{20} = \frac{16{,}667}{20} = 833{,}35mA$$

Levantamento energético:



Escrevendo as equações:

Malha 1:

$$EA - VR1 - VR2 - VR3 + EB = 0$$
$$30 - 14{,}167 - 14{,}167 - 16{,}667 + 15 = -0{,}001 \approx 0$$

Malha 2:

$$-EB + VR3 - VR4 - VR5 = 0$$

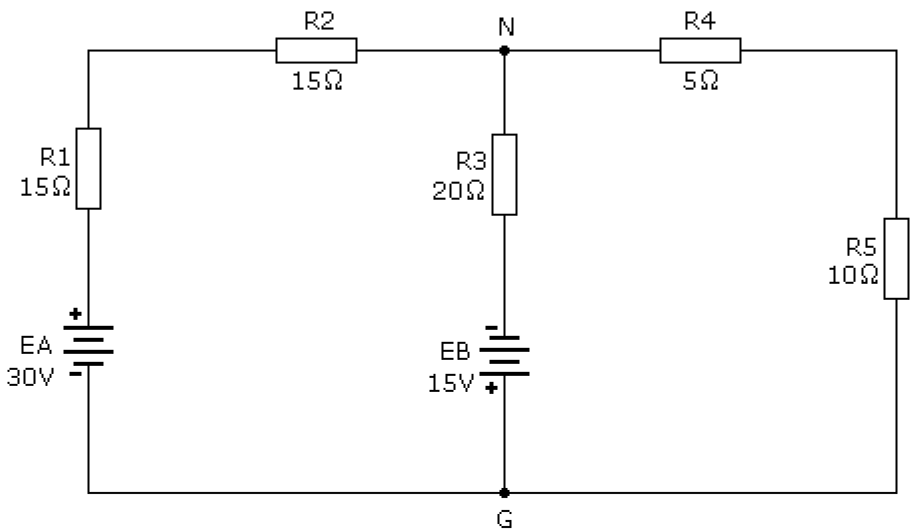
$$-15 + 16{,}667 - 0{,}555 - 1{,}111 = 0{,}001 \approx 0$$

Malha externa:

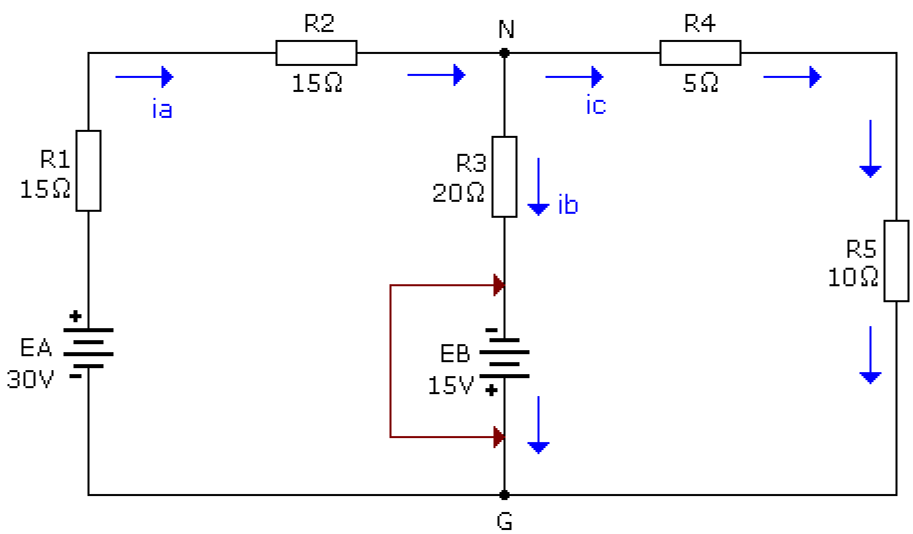
$$EA - VR1 - VR2 - VR4 - VR5 = 0$$

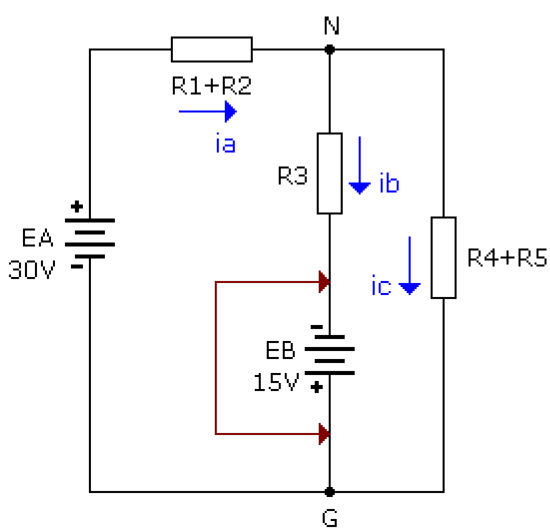
$$30 - 14{,}167 - 14{,}167 - 0{,}555 - 1{,}111 = 0$$

MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO:



INFLUÊNCIA DE EA (curto em EB):





R1+R2 = 30Ω

R4+R5 = 15Ω

RT = (R1+R2) + R3//(R4+R5)

RT = 30 + 20//15

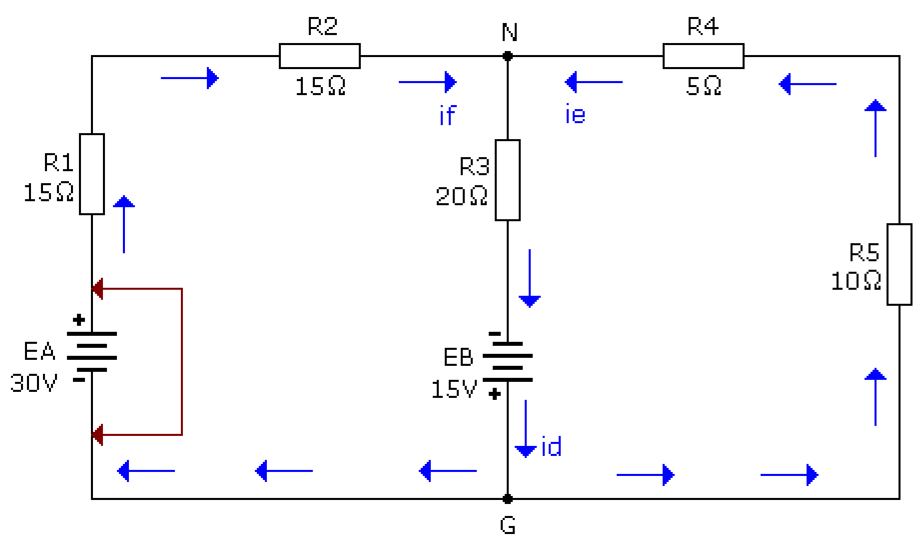
RT = 30 + 8,571 = 38,571Ω

$$ia = \frac{30}{38,571} = 777,786mA$$

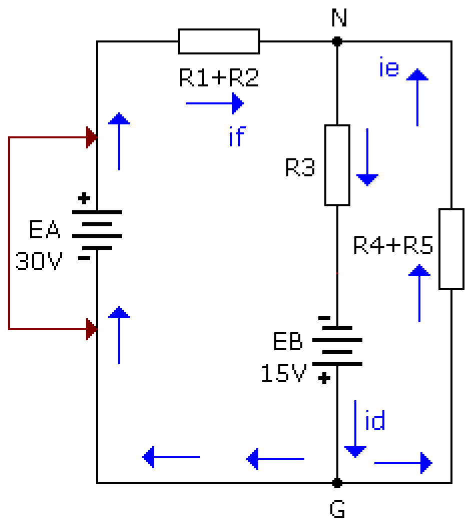
$$ib = \frac{777,786.15}{20+15} = \frac{11666,79}{35} = 333,337mA$$

$$ic = \frac{777,786.20}{35} = \frac{15555,72}{35} = 444,449mA$$

INFLUÊNCIA DE EB (curto em EA):



Teremos:



R1 + R2 = 30Ω

R4 + R5 = 15Ω

RT = 20 + (R1 + R2)//(R4 + R5)

RT = 20 + 30//15

30//15 = 10Ω

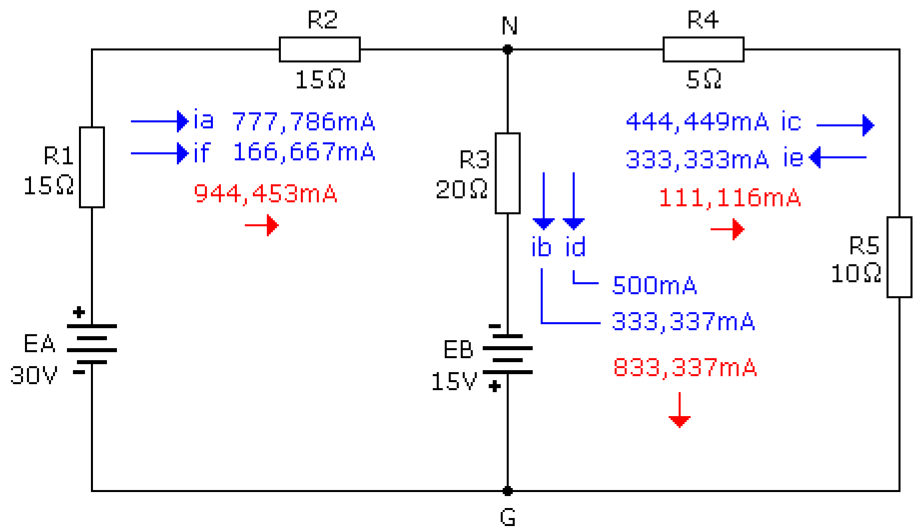
RT = 30Ω

$$id = \frac{15}{30} = 0{,}5A\ (500mA)$$

$$ie = \frac{500.30}{45} = \frac{15000}{45} = 333{,}333mA$$

$$if = \frac{500.15}{45} = \frac{7500}{45} = 166{,}667mA$$

SUPERPONDO AS MALHAS:



VR1 = 944,453 . 15 = 14,168V

VR2 = 944,453 . 15 = 14,168V

VR3 = 833,337 . 20 = 16,667V

VR4 = 111,116 . 5 = 0,556V

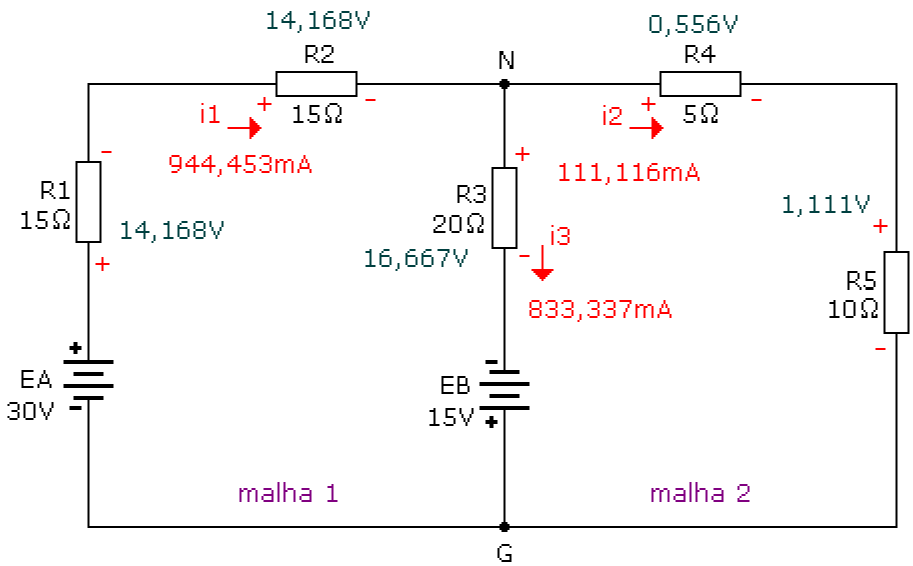
VR5 = 111,116 . 10 = 1,111V

Aplicando LKC:

i1 - i2 - i3 = 0

944,453mA - 111,116mA - 833,337mA = 0

Aplicando LKT:



Malha 1:

$$EA - VR1 - VR2 - VR3 - (-EB) = 0$$

$$30 - 14{,}168 - 14{,}168 - 16{,}667 + 15 = -0{,}003 \approx 0$$

Malha 2:

$$-EB - (-VR3) - VR4 - VR5 = 0$$

$$-15 + 16{,}667 - 0{,}556 - 1{,}111 = 0$$

Malha externa:

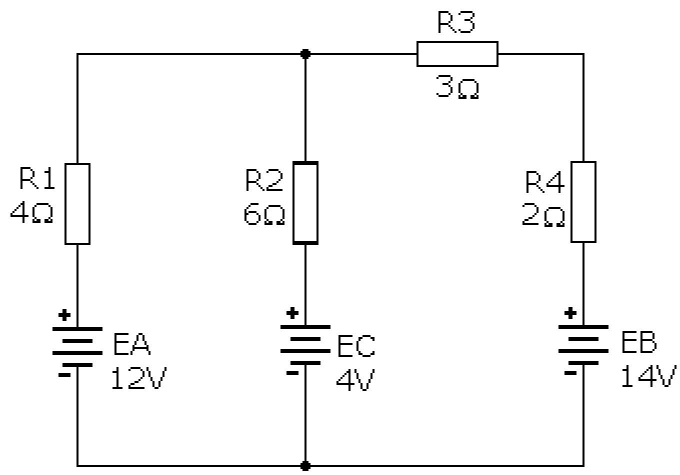
$$EA - VR1 - VR2 - VR4 - VR5 = 0$$

$$30 - 14{,}168 - 14{,}168 - 0{,}556 - 1{,}111 = -0{,}003 \approx 0$$

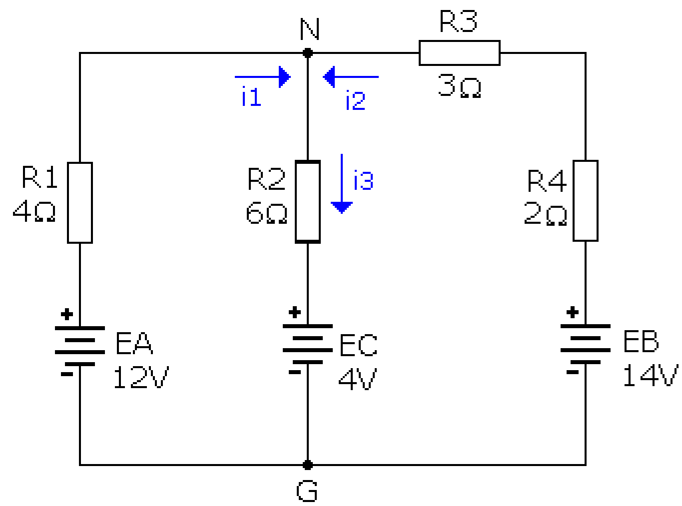
EXERCÍCIO RESOLVIDO

O circuito a seguir possui 3 baterias.

O mesmo será resolvido pelo método da *tensão nodal*, cabendo ao leitor resolvê-lo pelos métodos da *tensão nas malhas* e da *superposição* e fazer a comparação dos resultados.



Definindo o nó principal, adotaremos para as duas malhas o sentido convencional da corrente (do + para o -). Assim as correntes i1 e i2 entram no nó enquanto que a corrente i3 sai.



Escrevendo a equação do nó: i1 + 12 - i3 = 0 ➔ i3 = i1 + i2

$$i1 = \frac{EA - VN}{R1} = \frac{12 - VN}{4}$$

$$i2 = \frac{EB - VN}{R3 + R4} = \frac{14 - VN}{5}$$

$$i3 = \frac{-EC + VN}{R2} = \frac{-4 + VN}{6}$$

$$\frac{12 - VN}{4} + \frac{14 - VN}{5} = \frac{-4 + VN}{6} \qquad mmc = 60$$

$$\frac{15(12 - VN) + 12(14 - VN) = 10(-4 + VN)}{60} =$$

$$= 180 - 15VN + 168 - 12VN = -40 + 10VN$$

$$348 - 27VN = -40 + 10VN \rightarrow 388 - 37VN = 0 \rightarrow 308 = 37VN$$

$$VN = \frac{388}{37} = 10{,}486V$$

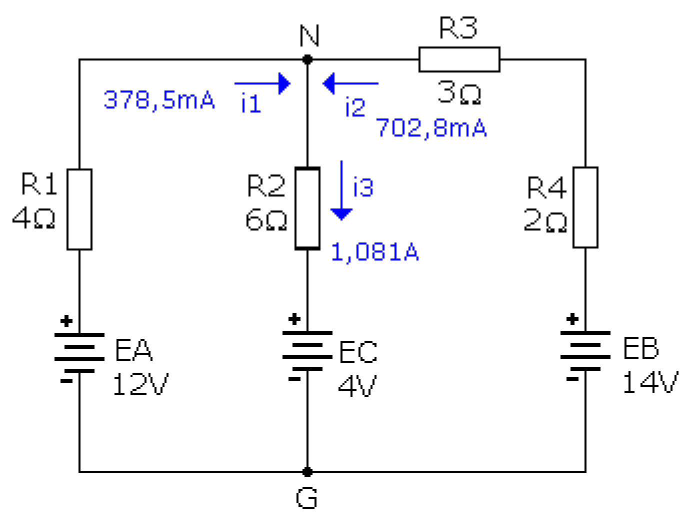
$$i1 = \frac{12 - VN}{4} = \frac{12 - 10{,}486}{4} = \frac{1{,}514}{4} = 378{,}5mA$$

$$i2 = \frac{14 - VN}{5} = \frac{14 - 10{,}486}{5} = \frac{3{,}514}{5} = 702{,}8mA$$

$$i3 = \frac{4 - VN}{6} = \frac{4 - 10{,}486}{6} = \frac{-6{,}486}{6} = -1{,}081A$$

Observe o resultado negativo da corrente i3. Isto significa que ela está saindo do nó.

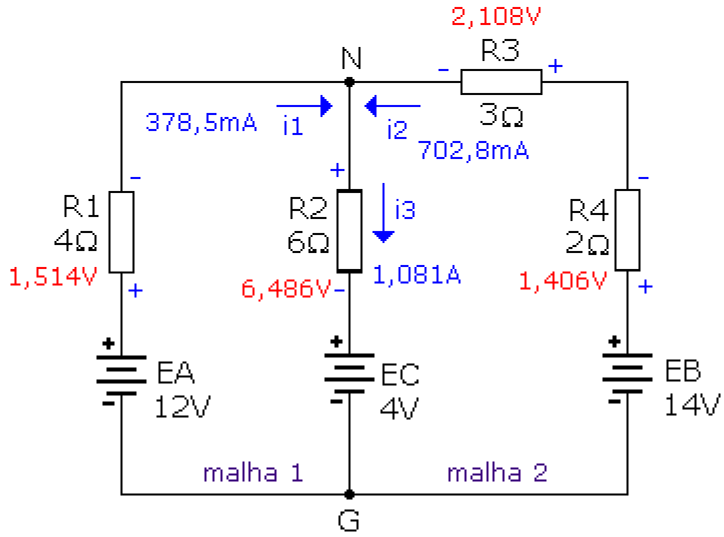
Vejamos:



$$VR1 = 4 \cdot 378{,}5mA = 1{,}514V$$

$$VR2 = 6 \cdot 1{,}081A = 6{,}486V$$

VR3 = 3 . 702,8mA = 2,108V
VR4 = 2 . 702,8mA = 1,406V



Fazendo o levantamento energético do circuito:

Malha 1:

EA - VR1 - VR2 - EC = 0

12 - 1,514 - 6,486 - 4 = 0

Malha 2:

EC + VR2 + VR3 + VR4 - EB = 0

4 + 6,486 + 2,108 + 1,406 - 14 = 0

Malha externa:

EA - VR1 + VR3 + VR4 - EB = 0

12 - 1,514 + 2,108 + 1,406 - 14 = 0