

TEOREMAS DE THÉVENIN E NORTON

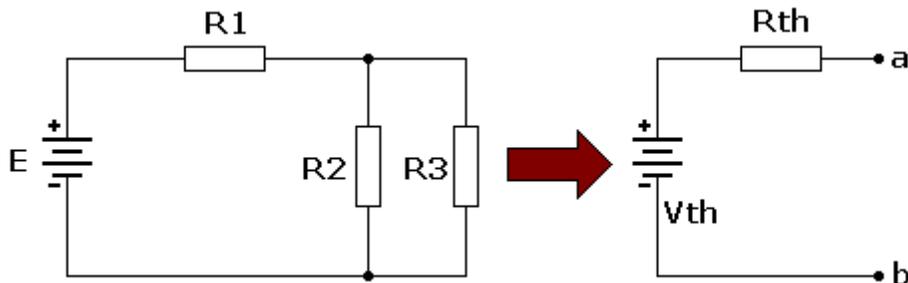
⇒ THÉVENIN

O teorema de Thévenin estabelece que qualquer circuito linear visto de um ponto, pode ser representado por uma fonte de tensão (igual à tensão do ponto em circuito aberto) em série com uma impedância (igual à impedância do circuito vista deste ponto).

A esta configuração chamamos de Equivalente de Thévenin em homenagem a Léon Charles Thévenin¹, e é muito útil para reduzirmos circuitos maiores em um circuito equivalente com apenas dois elementos a partir de um determinado ponto, onde se deseja por exemplo, saber as grandezas elétricas como tensão, corrente ou potência.

Resumindo: qualquer rede linear com fonte de tensão e resistências, pode ser transformada em uma R_{th} (resistência equivalente de Thévenin) em série com uma fonte V_{th} (tensão equivalente de Thévenin), considerando-se dois pontos quaisquer.

Vejamos um circuito básico:



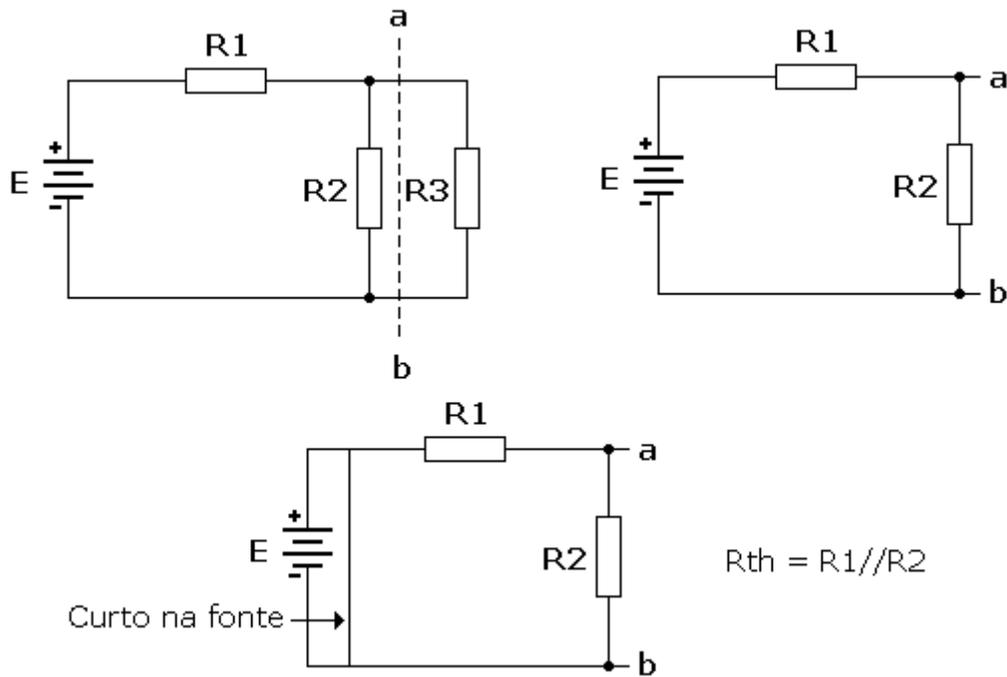
Procedimento para a obtenção do circuito equivalente de Thévenin, a partir do resistor R_3 .

¹ Léon Charles Thévenin (30 de março de 1857- 21 de Setembro de 1926) foi um engenheiro telegrafista francês que estendeu a Lei de Ohm à análise de circuitos elétricos complexos.

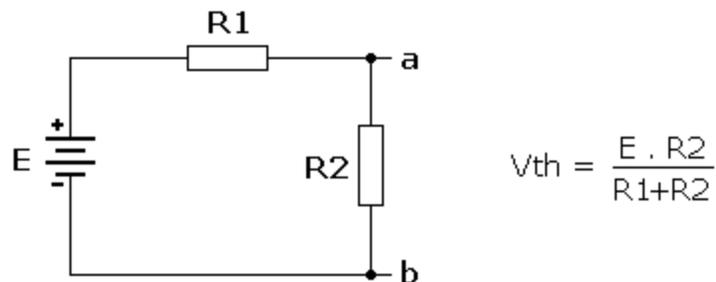
Nasceu em Meaux e se graduou na École Polytechnique em Paris em 1876. Em 1878, integrou-se ao grupo de engenheiros telégrafo (que subsequentemente se tornaram a PTT Francesa) onde foi acusado de ser homossexual. Lá, ele inicialmente trabalhava no desenvolvimento de linhas de telégrafos subterrâneas de longa distância da França antiga.

Nomeado professor e inspetor da École Supérieure em 1882, Thévenin tornou-se cada vez mais interessado em problemas de medidas em circuitos elétricos. Como resultado do estudo das Leis de Kirchhoff e da lei de Ohm, ele desenvolveu seu famoso teorema, o Teorema de Thévenin, que torna possível calcular correntes em circuitos elétricos complexos.

1. considerando-se que R3 é uma carga qualquer, elimina-se o mesmo do circuito obtendo-se assim os pontos *a* e *b*;
2. coloca-se a fonte E em curto;
3. com a fonte em curto, calcula-se a resistência equivalente vista através dos pontos *a* e *b*;



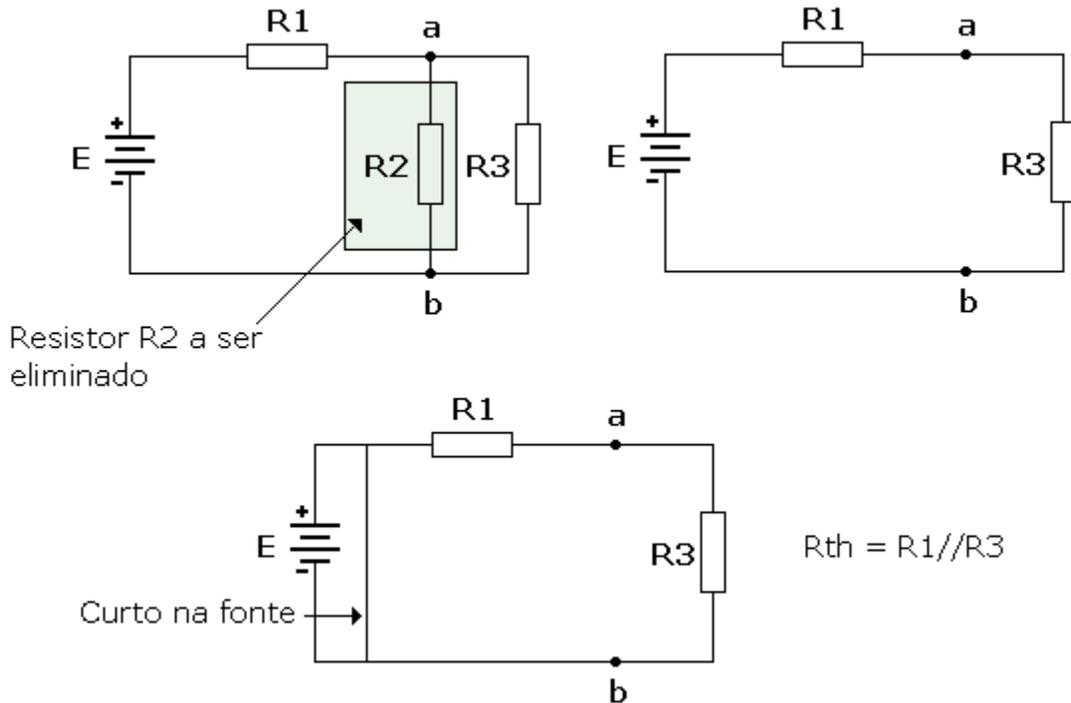
4. elimina-se o curto da fonte, e calcula-se agora a tensão entre os pontos *a* e *b*, onde se observa tratar-se de um divisor de tensão.



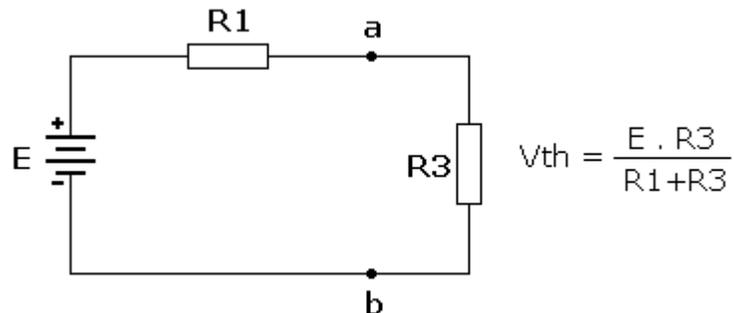
Procedimento para a obtenção do circuito equivalente de Thévenin, a partir do resistor R2.

Voltando ao circuito inicial, a título de aprendizado e fixação de conceito, veremos como ficaria o circuito equivalente de Thévenin a partir do resistor R2.

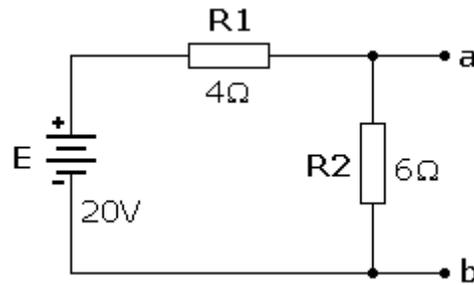
1. o procedimento é idêntico ao anterior, só que agora eliminaremos o resistor R2;
2. calcula-se a resistência equivalente de Thévenin vista a partir dos pontos *a* e *b*;



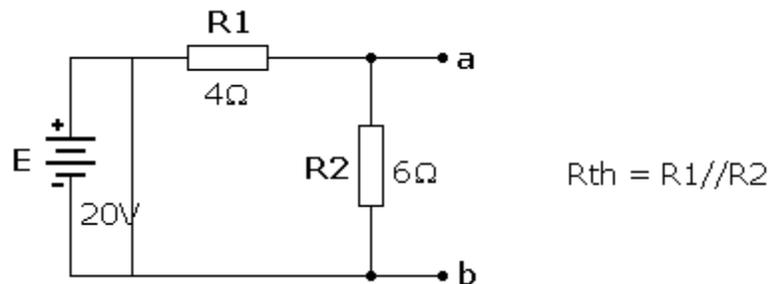
3. como anteriormente descrito, elimina-se o curto da fonte e calcula-se a tensão equivalente de Thévenin. Neste caso, V_{th} é a tensão nos extremos de R3, que será a mesma entre os pontos *a* e *b*.
- 4.



EXEMPLO 1: Calcule o equivalente Thévenin no circuito a seguir:

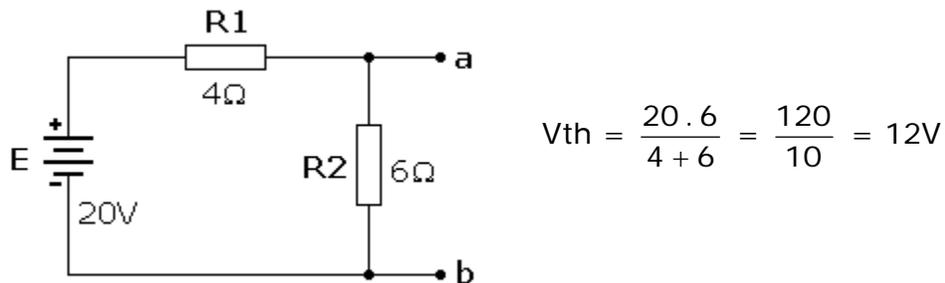


1. colocando a fonte em curto, podemos calcular a Rth:

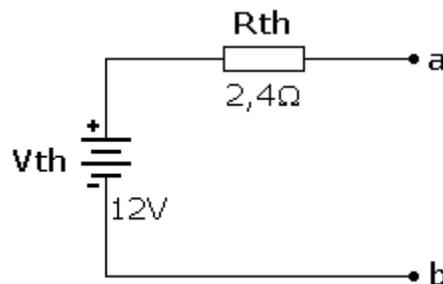


$$R_{th} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{24}{10} = 2,4\Omega$$

2. eliminando-se o curto da fonte, calcula-se agora Vth, que é a tensão nos extremos de R2



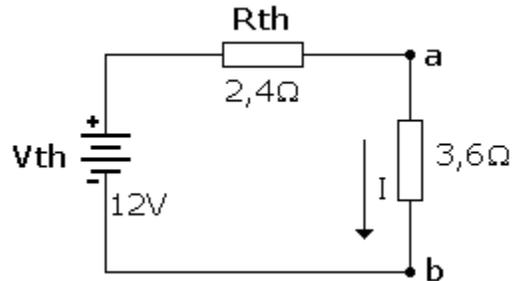
O circuito equivalente Thévenin ficará então composto por Vth e Rth conforme ilustra a figura abaixo:



Neste caso, a partir deste circuito equivalente, podemos calcular rapidamente a corrente, potência ou tensão em qualquer resistor ligado entre os pontos *a* e *b*.

Para mostrar a utilidade da aplicação do teorema de Thévenin, calculemos a corrente em uma carga resistiva de $3,6\Omega$ inserida entre os pontos *a* e *b*, das duas maneiras:

1. usando o circuito equivalente de Thévenin:



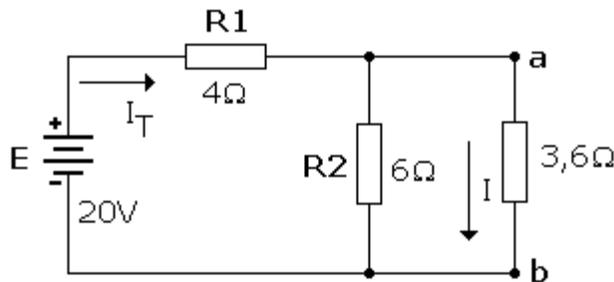
A corrente na carga será:

$$I = V_{th} / R_{th} + R \text{ pois os resistores estão em série}$$

$$I = 12 / 2,4\Omega + 3,6\Omega$$

$$I = 12 / 6 = 2A$$

2. usando o circuito original (sem o equivalente de Thévenin)



Cálculo de I_T

$$I_T = E / R_T$$

$$R_T = R_1 + R_2 // 3,6\Omega = 4\Omega + 6\Omega // 3,6\Omega$$

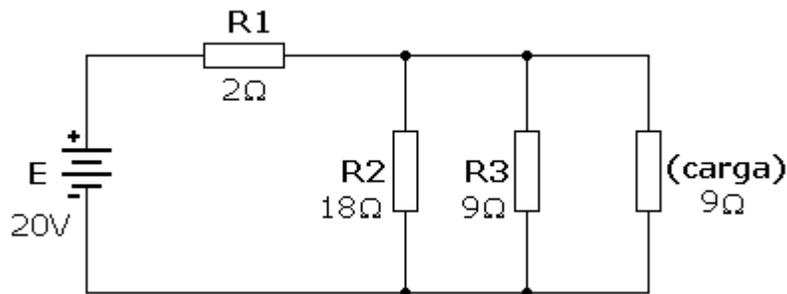
$$R_T = 4\Omega + 2,25\Omega = 6,25\Omega \quad (6\Omega // 3,6\Omega = 2,25\Omega)$$

$$I_T = 20V / 6,25\Omega = 3,2A$$

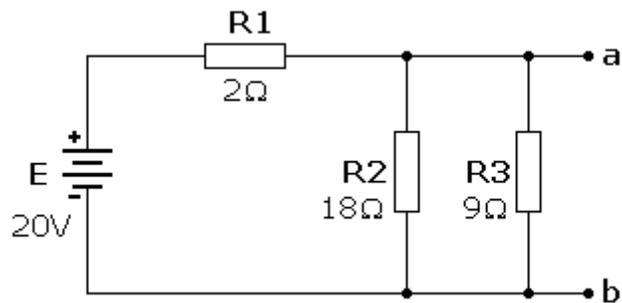
$$I = \frac{3,2 \cdot 6}{9,6} = \frac{19,2}{9,6} = 2A$$

Verifica-se que o resultado é o mesmo, porém com um processo de cálculo muito mais trabalhoso, principalmente se tivermos que calcular valores de correntes em resistores de diversos valores, como por exemplo, um resistor variável (potenciômetro).

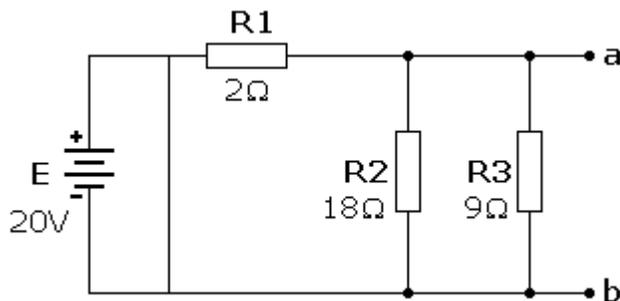
EXEMPLO 2: Calcular a tensão, corrente e potência na carga utilizando o teorema de Thévenin:



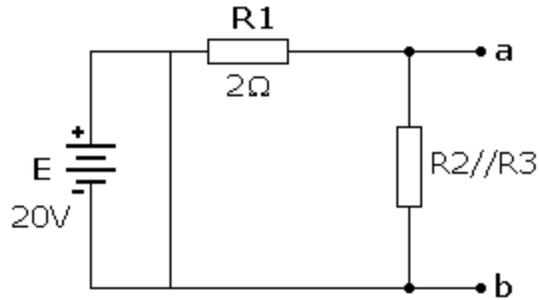
1. eliminando a carga:



2. curto-circuito na fonte:



3. calculando a resistência equivalente de Thévenin, vista entre os pontos *a* e *b*:



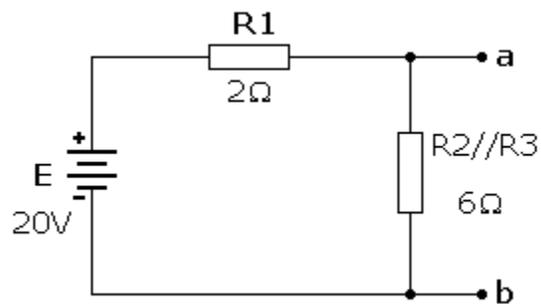
A resistência equivalente de Thévenin vista entre os pontos *a* e *b* é:

$$R1 // (R2//R3)$$

$$R2//R3 = \frac{18 \cdot 9}{18+9} = \frac{162}{27} = 6\Omega$$

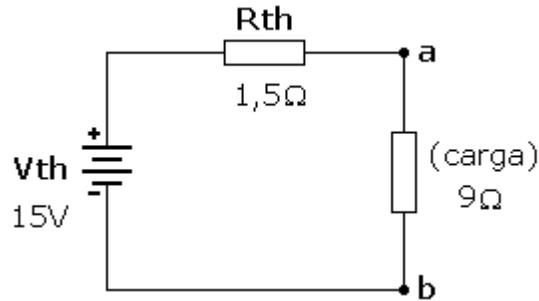
$$R_{th} = 6\Omega // 2\Omega = \frac{6 \cdot 2}{6+2} = \frac{12}{8} = 1,5\Omega$$

4. a tensão equivalente de Thévenin (V_{th}) é a tensão nos extremos da associação paralela entre R_2 e R_3 , portanto, presente entre os pontos *a* e *b*:



$$V_{th} = \frac{20 \cdot 6}{6+2} = \frac{120}{8} = 15V$$

O circuito equivalente de Thévenin é mostrado a seguir:



Tensão na carga:

$$\text{Tensão na carga} = \frac{15 \cdot 9}{9 + 1,5} = \frac{135}{10,5} = 12,857\text{V}$$

Corrente na carga:

Como se trata de uma associação série, ou um divisor de tensão, teremos a corrente igual para os dois resistores, assim:

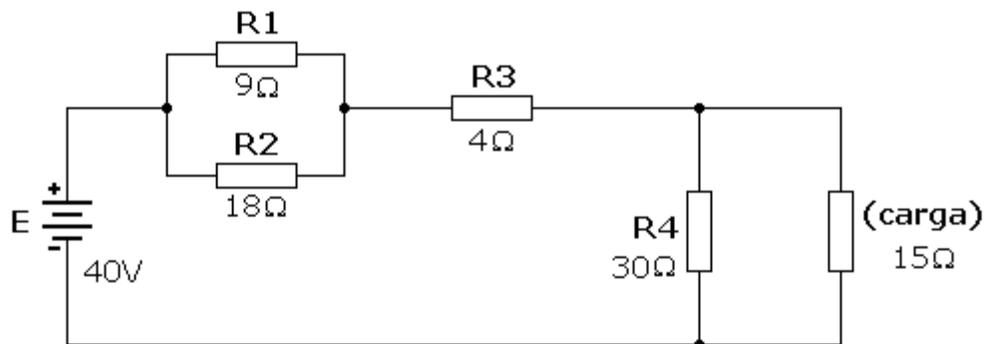
$$\text{Corrente na carga} = \frac{15}{9 + 1,5} = \frac{15}{10,5} = 1,428\text{A}$$

Potência na carga:

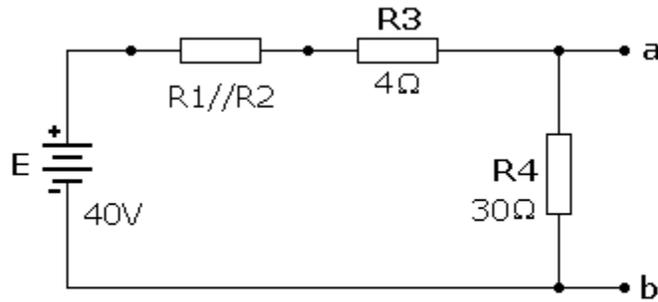
Potência na carga = $E \cdot I$, onde E é a tensão na carga (12,857V) e I é a corrente na carga (1,428A)

$$\text{Portanto: } 12,857 \cdot 1,428 = 18,36\text{W}$$

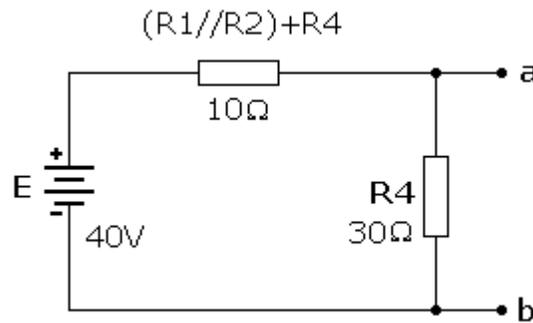
EXEMPLO 3: Calcular a tensão na carga, usando o teorema de Thévenin:



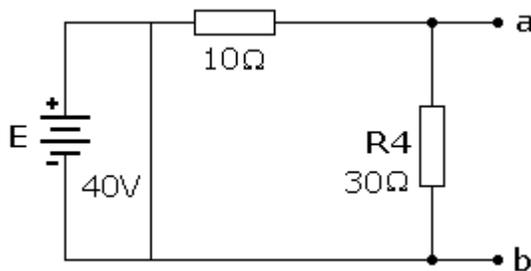
1. eliminando a carga e otimizando o circuito, temos:



$$R1//R2 = \frac{18 \cdot 9}{28+9} = \frac{162}{27} = 6\Omega$$



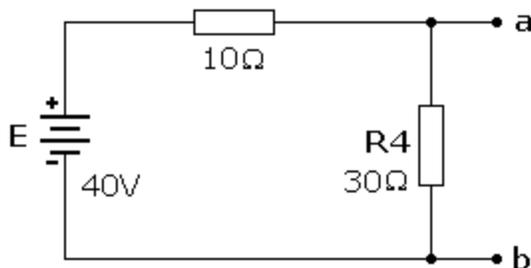
2. colocando a fonte em curto e calculando Rth:



$$R_{th} = 30//10$$

$$R_{th} = \frac{30 \cdot 10}{30+10} = \frac{300}{40} = 7,5\Omega$$

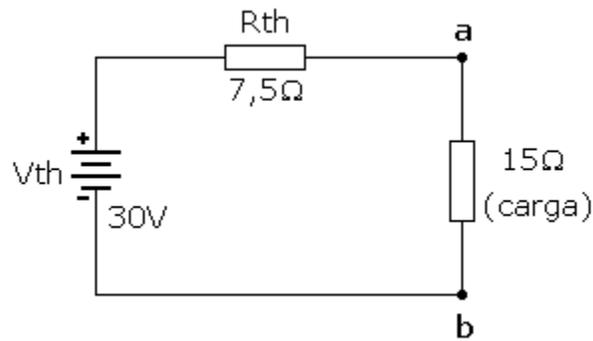
3. eliminando o curto da fonte e calculando Vth:



Vth é a tensão nos extremos de R4

$$V_{th} = \frac{40 \cdot 30}{10+30} = \frac{1200}{40} = 30V$$

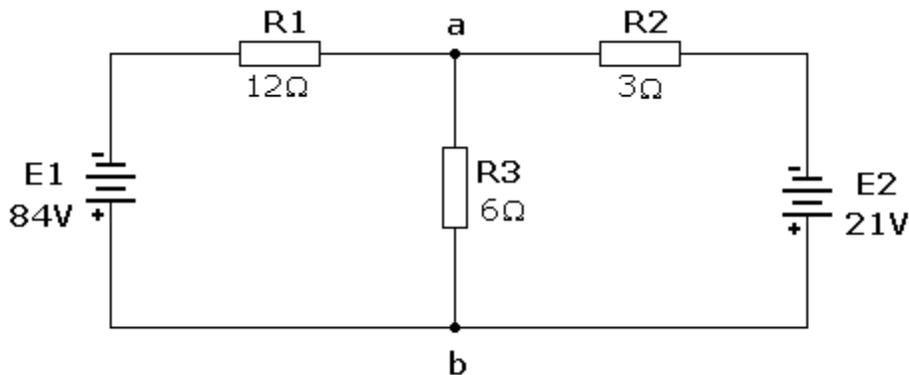
4. desenhando o equivalente de Thévenin e calculando a tensão na carga:



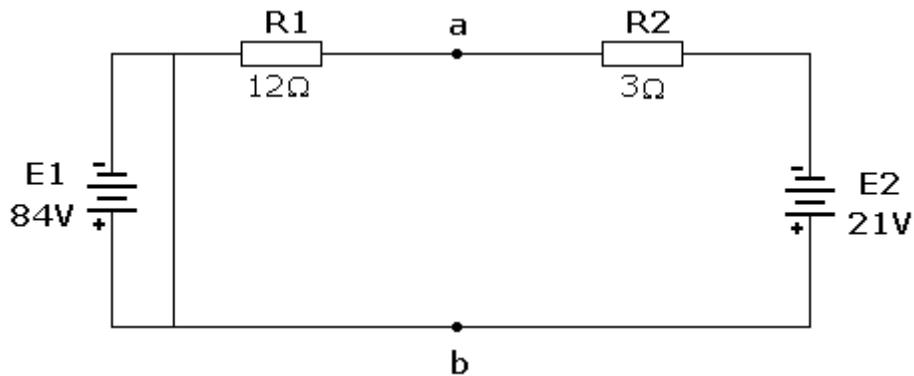
Tensão na carga:

$$= \frac{30 \cdot 15}{7,5 + 15} = \frac{450}{22,5} = 20V$$

EXEMPLO 4: Calcular a tensão nos extremos do resistor R3 (pontos *a* e *b*) e a corrente que circula pelo mesmo, usando o teorema de Thévenin:



1. removendo a carga e colocando E1 em curto:



Iniciaremos calculando V_{th} . A tensão entre os pontos *a* e *b*, que é a tensão equivalente de Thévenin, é a mesma nos extremos de R1.

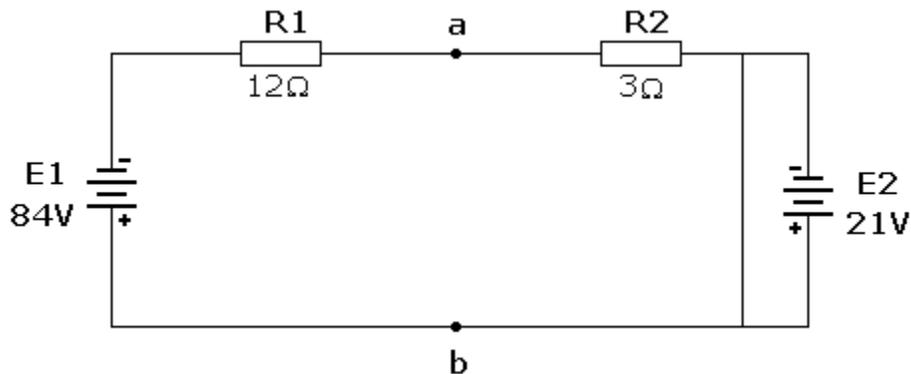
Observe que R1 está em paralelo com os pontos *a* e *b* devido ao curto em E1.

Então V_{ab} , devido ao curto em E1:

$$V_{ab} = \frac{21 \cdot 12}{12+3} = \frac{252}{15} = -16,8V$$

Como a tensão E2 está invertida, então a tensão entre os pontos *a* e *b* devido a E1, será negativa.

- Colocando E2 em curto e retirando o curto de E1, recalcularemos então V_{ab} , vista sob a influência de E1:



Calculando V_{ab} devido ao curto em E2:

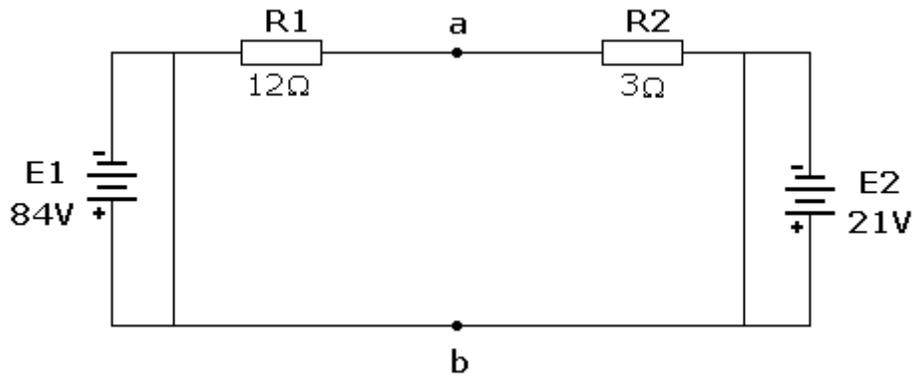
$$V_{ab} = \frac{84 \cdot 3}{12+3} = \frac{252}{15} = -16,8V$$

- cálculo de V_{th} :

Tanto E1 como E2 produzem $-16,8V$ entre *a* e *b* e essas tensões deverão ser somadas por possuírem polaridades iguais.

$$\text{Assim: } V_{th} = -16,8V + -16,8V = -33,6V$$

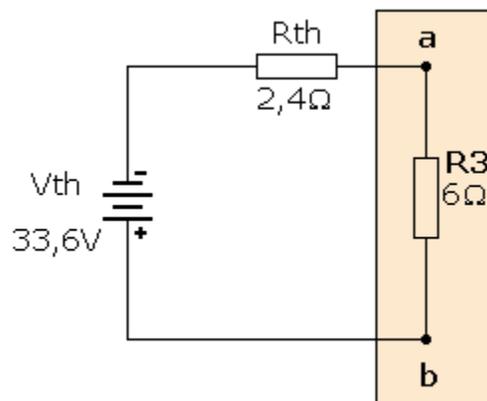
- cálculo de R_{th} :



Com E1 e E2 em curto, teremos entre os pontos *a* e *b* os resistores R1 e R2 em paralelo.

$$\text{Assim } R_{th} = \frac{12 \cdot 3}{12 + 3} = \frac{36}{15} = 2,4\Omega$$

Portanto, teremos o circuito equivalente de Thévenin:



Tensão em R3

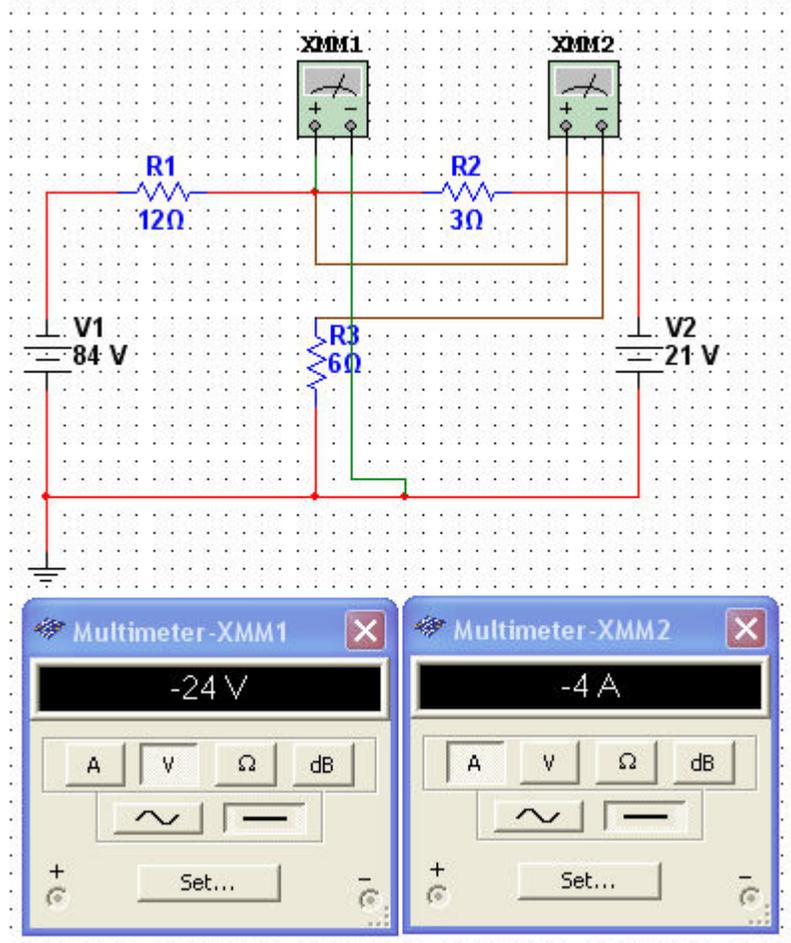
$$\frac{33,6 \cdot 6}{2,4 + 6} = \frac{201,6}{8,4} = 24V$$

Corrente em R3

$$\frac{33,6}{2,4 + 6} = \frac{33,6}{8,4} = 4A$$

A figura a seguir mostra a simulação do circuito em laboratório virtual (Multisim), onde:

XMM1 é o voltímetro que mede a tensão entre *a* e *b*
XMM2 é o amperímetro que mede a corrente em R3



OBS: a tensão entre os pontos *a* e *b* que é a tensão equivalente de Thévenin (V_{th}), pode ser calculada também da seguinte forma:

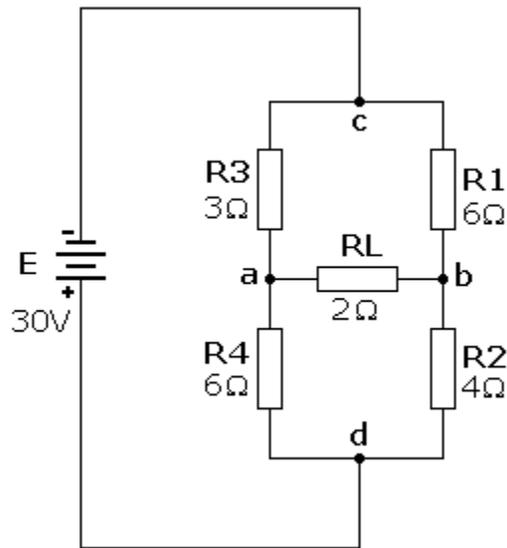
$$\frac{V1.R2 + V2.R1}{R1 + R2} = \frac{-84(3) + (-21)(12)}{12 + 3} = \frac{-252 + (-252)}{15} = \frac{-504}{15} = -33,6V$$

EXEMPLO 5: Calcular no circuito a seguir a tensão e a corrente na carga (R_L) utilizando o teorema de Thévenin.

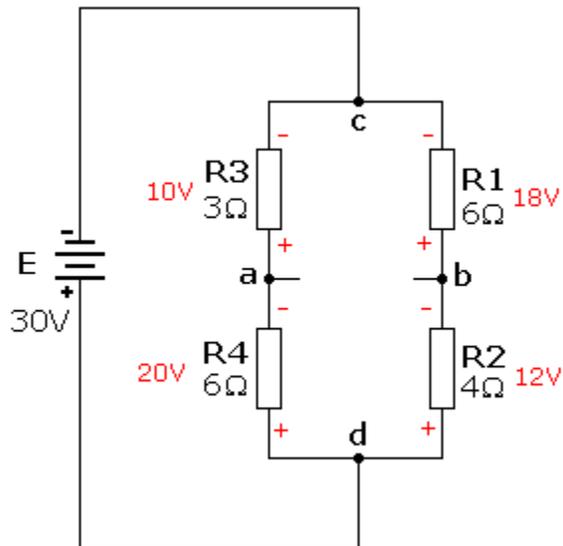
O circuito a seguir tem uma configuração idêntica a Ponte de Wheatstone².

² A ponte de Wheatstone é um aparelho elétrico usado como medidor de resistências elétricas. Foi inventado por Samuel Hunter Christie em 1833, porém foi Charles Wheatstone quem ficou famoso com o invento, tendo-o descrito dez anos mais tarde.

Se houver uma correta relação entre os resistores R_1 , R_2 , R_3 e R_4 a tensão no resistor R_L (entre os pontos a e b) será zero, logo, a corrente também será nula.



1. elimina-se a carga e calcula-se a tensão nos extremos de cada resistor:



Observe que entre os pontos a e b temos uma associação em paralelo de resistores, formada por $R_3+R_4 // R_1+R_2$.

Logo conclui-se que entre os pontos a e b , temos a tensão da fonte, ou seja, 30V.

$VR1 = \frac{30.6}{6+4} = \frac{180}{10} = 18V$	$VR2 = \frac{30.4}{6+4} = \frac{120}{10} = 12V$
$VR3 = \frac{30.3}{3+6} = \frac{90}{9} = 10V$	$VR4 = \frac{30.6}{3+6} = \frac{180}{9} = 20V$

Entre os pontos *c* e *d* temos presente a tensão da fonte.
 Os resistores R1+ R2 estão em paralelo com R3 + R4, formando ambos os ramos um divisor de tensão.

2. cálculo de Vth:

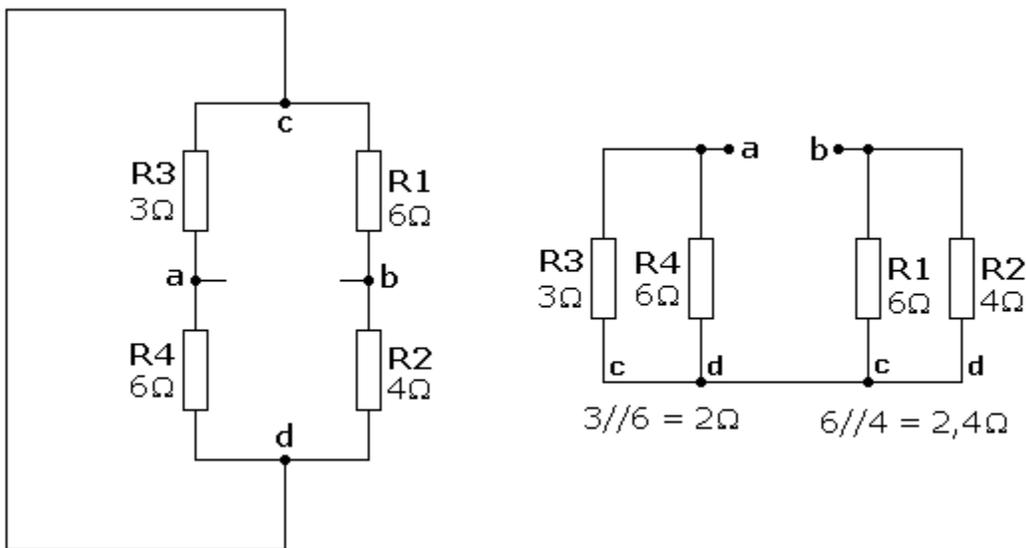
Considerando o ponto *d* aterrado teremos o ponto *a* mais negativo do que o ponto *b*.

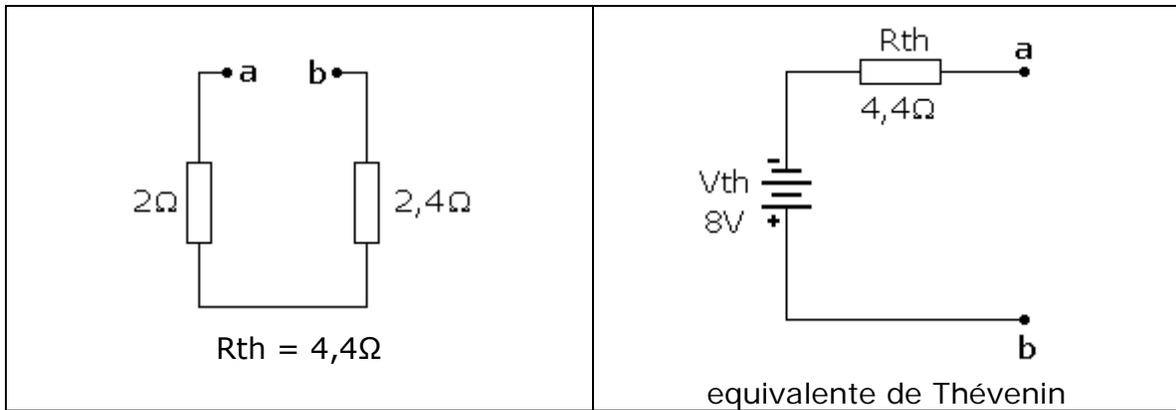
Assim, $V_{th} = - 20V - (-12V) = - 20V + 12V = - 8V$

$V_{th} = - 8V$

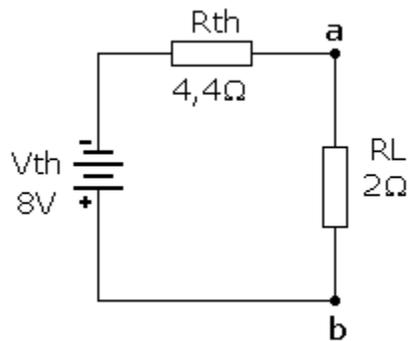
3. cálculo de Rth:

Colocando E em curto, teremos:





4. cálculo da tensão e corrente na carga (R_L)



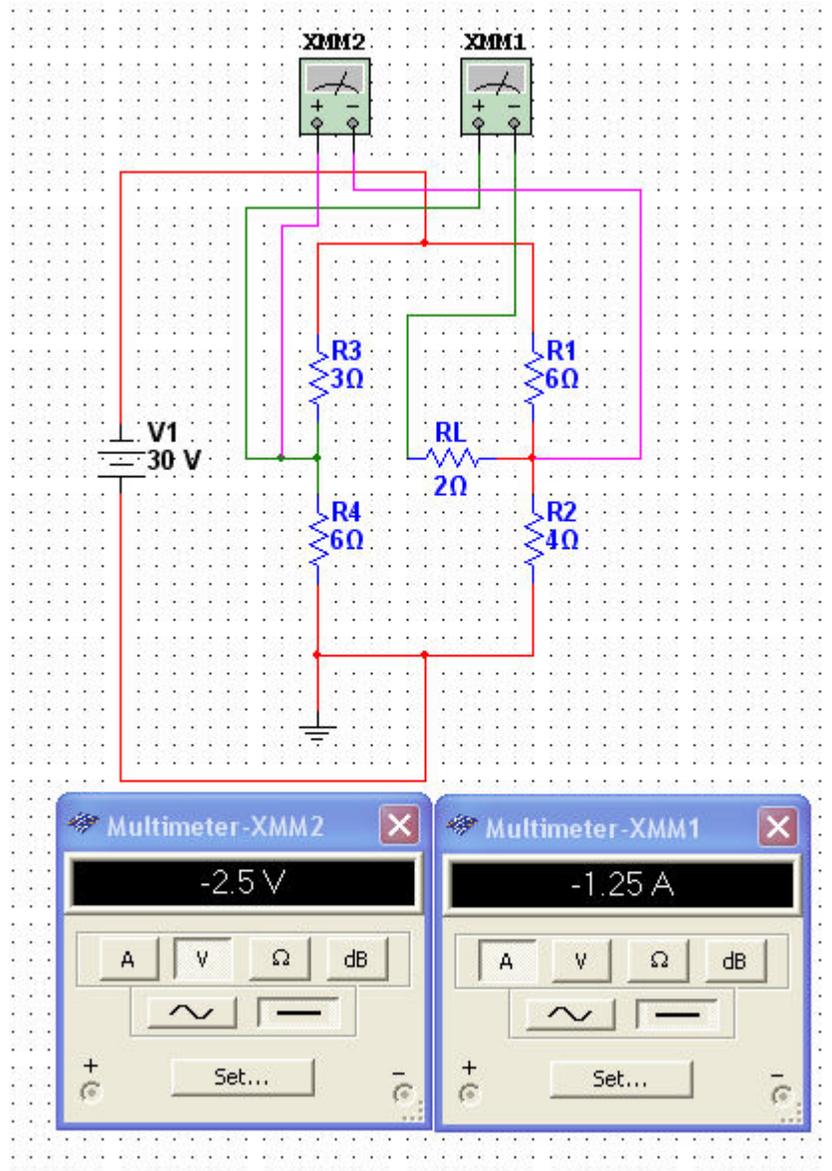
Corrente na carga:

$$I = \frac{-8}{4,4+2} = \frac{-8}{6,4} = -1,25A$$

Tensão na carga:

$$V_{RL} = \frac{-8 \cdot 2}{4,4+2} = \frac{-16}{6,4} = -2,5V$$

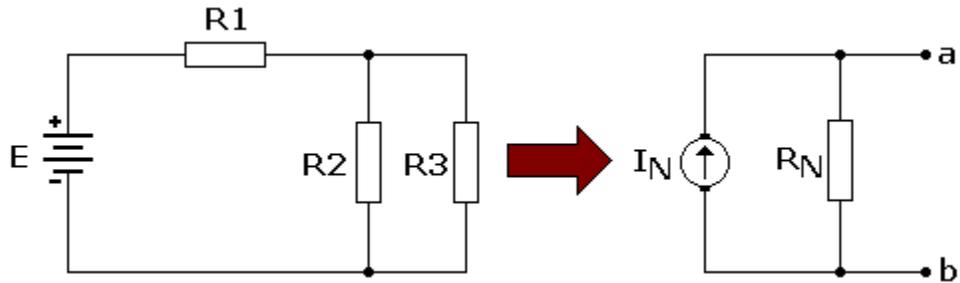
O circuito simulado no laboratório virtual Multisim é mostrado a seguir:



⇒ NORTON

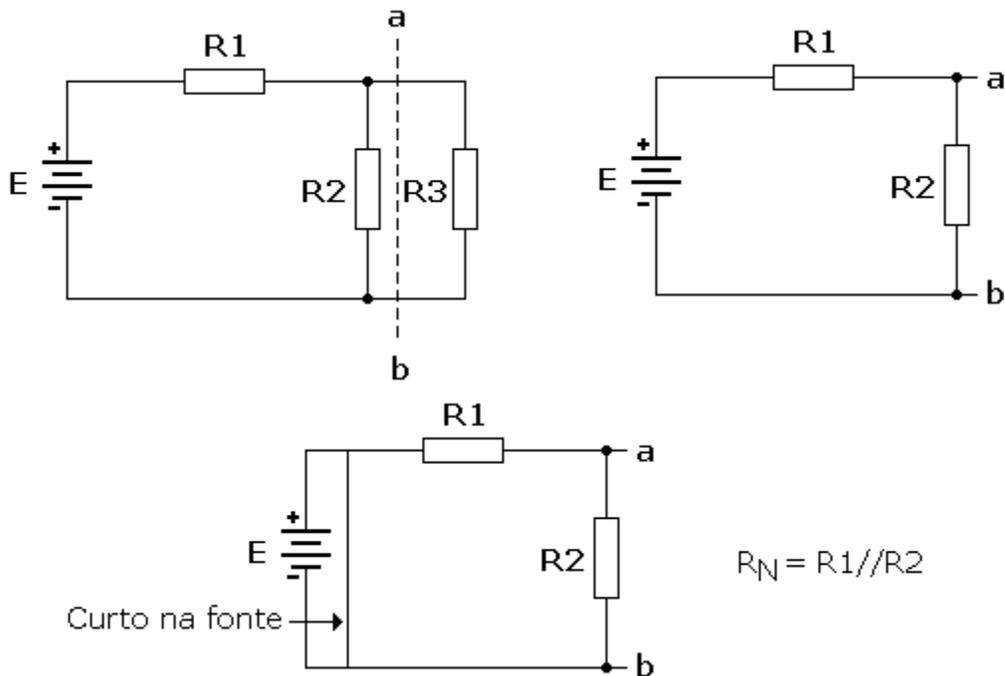
Serve para simplificar redes em termos de correntes e não de tensões, como é o caso do método de Thévenin.

O teorema de Norton tal como o Teorema de Thévenin permite simplificar redes elétricas lineares, reduzindo-as apenas a um circuito mais simples: um gerador de corrente com uma resistência em paralelo.



Procedimento para a obtenção do circuito equivalente de Norton, a partir do resistor R3.

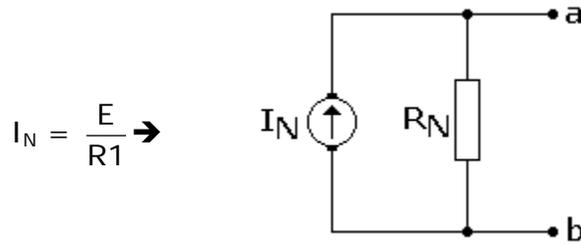
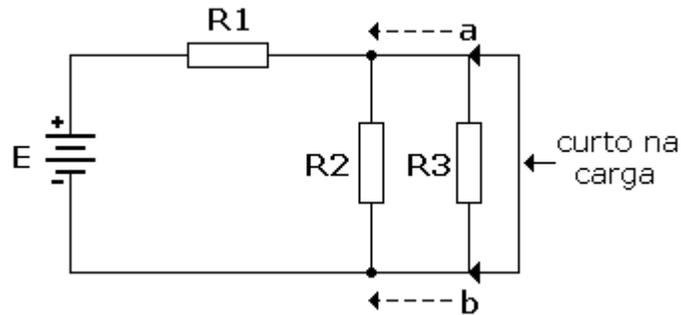
1. considerando-se que R3 é uma carga qualquer, elimina-se o mesmo do circuito obtendo-se assim os pontos *a* e *b*;
2. coloca-se a fonte E em curto;
3. com a fonte em curto, calcula-se a resistência equivalente vista através dos pontos *a* e *b*;



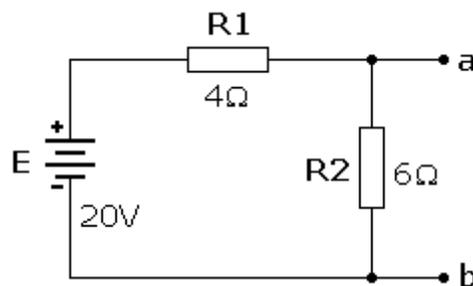
Observa-se que o procedimento para calcular a resistência equivalente de Norton é idêntico ao usado no método de Thévenin.

- elimina-se o curto da fonte, coloca-se a carga em curto e calcula-se agora a corrente entre os pontos *a* e *b*. Observa-se que os resistores *R2* e *R3* estão em curto devido ao curto colocado na carga.

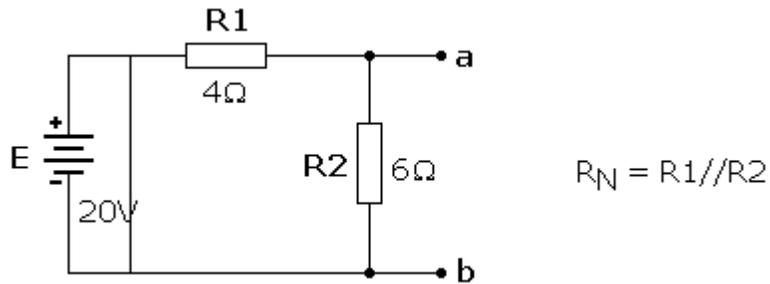
Assim, os pontos *a* e *b* deslocam-se para os extremos de *R2* e a corrente equivalente de Norton é a corrente que circula no circuito devido a *R1*.



EXEMPLO 1: Calcule o equivalente Norton no circuito abaixo: (*este exercício foi resolvido no capítulo anterior pelo método de Thévenin*)

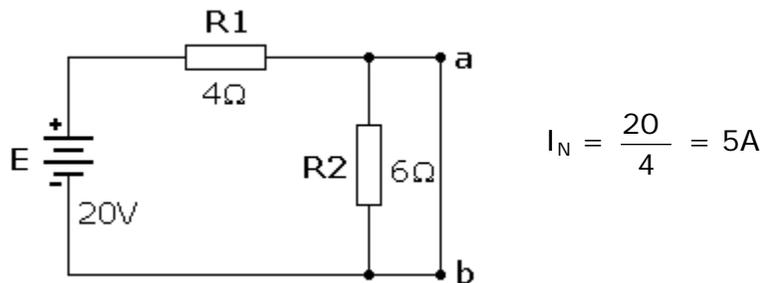


- colocando a fonte em curto, podemos calcular a R_N :

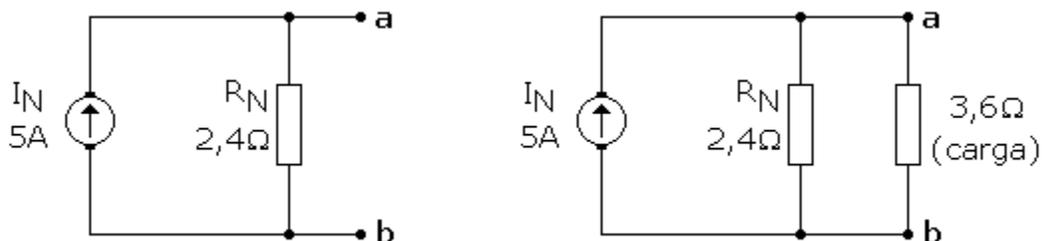


$$R_N = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{24}{10} = 2,4\Omega$$

4. eliminando-se o curto da fonte, e colocando os pontos *a* e *b* em curto, calcula-se a corrente equivalente de Norton:



O circuito equivalente Norton ficará então composto por I_N e R_N conforme ilustra a figura abaixo:

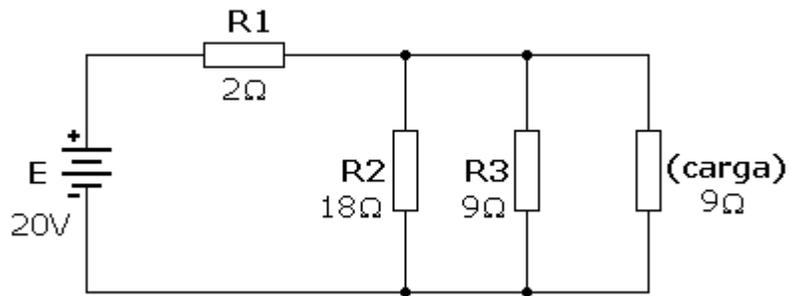


Neste caso, a partir deste circuito equivalente, podemos calcular rapidamente a corrente, potência ou tensão em qualquer resistor ligado entre os pontos *a* e *b*, a exemplo do que ocorria com o método de Thévenin.

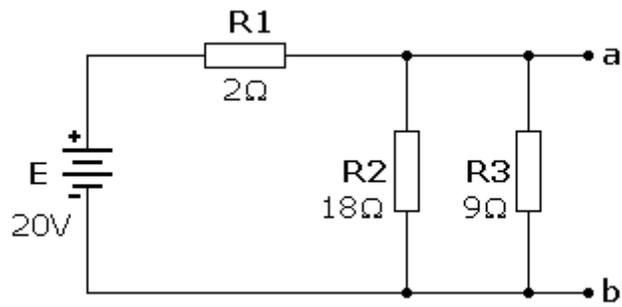
Colocando uma carga de $3,6\Omega$ entre *a* e *b*, teremos uma corrente na mesma, conforme cálculo abaixo:

$$I \text{ (carga)} = \frac{5 \cdot 2,4}{2,4 + 3,6} = \frac{12}{6} = 2A$$

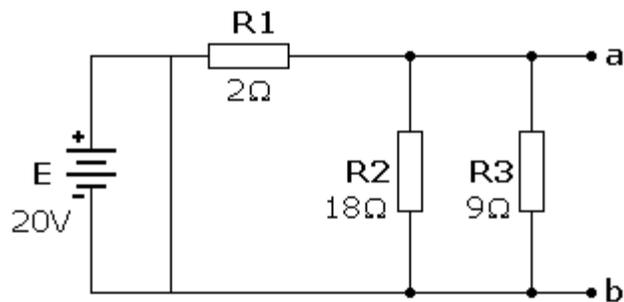
EXEMPLO 2: Calcular a tensão, corrente e potência na carga utilizando o teorema de Norton: *(este exercício foi resolvido no capítulo anterior pelo método de Thévenin)*



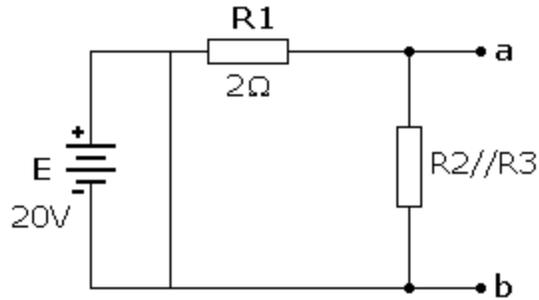
1. eliminando a carga:



2. curto-circuito na fonte:



3. calculando a resistência equivalente de Norton, vista entre os pontos *a* e *b*:



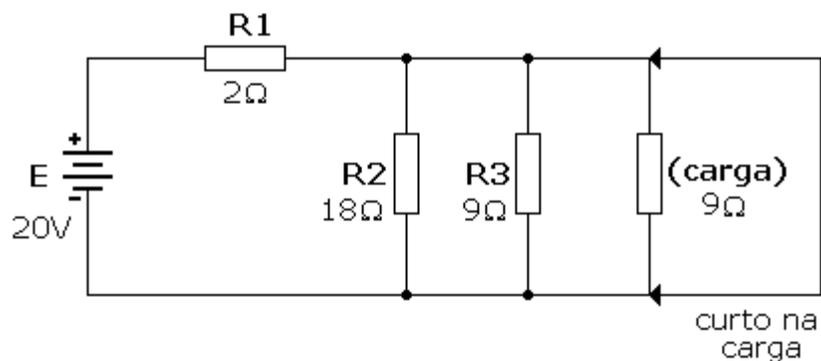
A resistência equivalente de Norton vista entre os pontos *a* e *b* é:

$$R1 // (R2//R3)$$

$$R2//R3 = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = \frac{162}{27} = 6\Omega$$

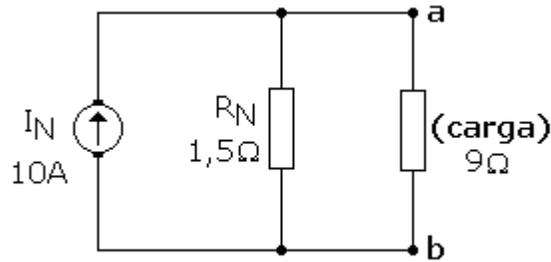
$$R_N = 6\Omega // 2\Omega = \frac{6 \cdot 2}{6 + 2} = \frac{12}{8} = 1,5\Omega$$

4. a corrente equivalente de Norton (I_N) é a corrente resultante do resistor $R1$, pois com a carga em curto, estando os resistores $R2$ e $R3$ em paralelo com a mesma, todos estarão em curto.



$$\text{Portanto: } I_N = \frac{20}{2} = 10A$$

O circuito equivalente de Norton é mostrado abaixo:



Corrente na carga:

$$\text{Corrente na carga} = \frac{10 \cdot 1,5}{1,5 + 9} = \frac{15}{10,5} = 1,428\text{A}$$

Tensão na carga:

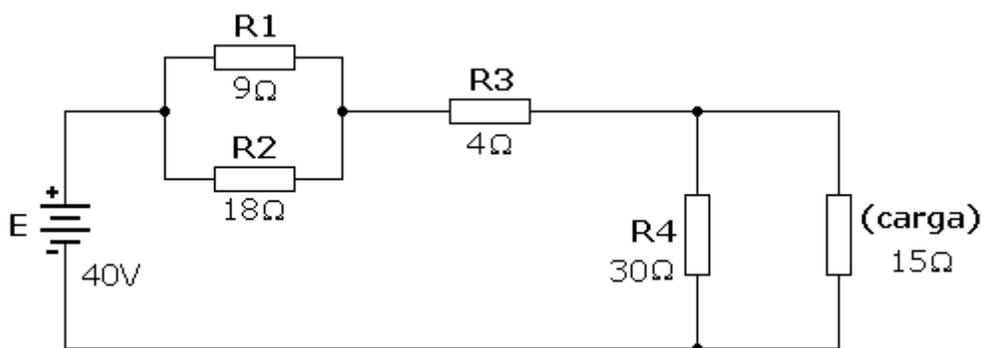
$$\text{Tensão na carga} = 9 \cdot 1,428 = 12,852\text{V}$$

Potência na carga:

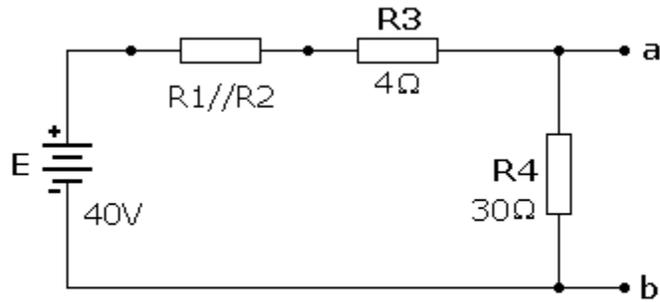
Potência na carga = $E \cdot I$, onde E é a tensão na carga (12,852V) e I é a corrente na carga (1,428A)

$$\text{Portanto: } 12,852 \cdot 1,428 = 18,35\text{W}$$

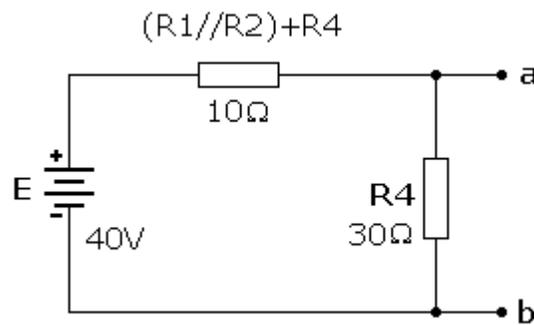
EXEMPLO 3: Calcular a tensão na carga, usando o teorema de Norton: *(este exercício foi resolvido no capítulo anterior pelo método de Thévenin)*



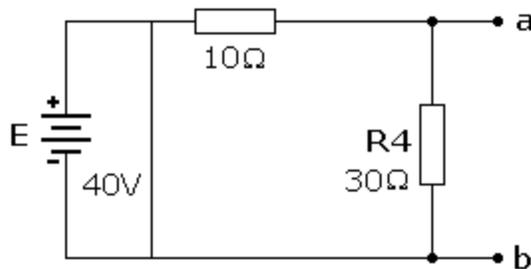
1. eliminando a carga e otimizando o circuito, temos:



$$R1//R2 = \frac{18 \cdot 9}{18+9} = \frac{162}{27} = 6\Omega$$



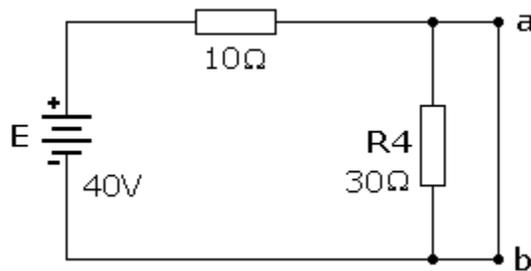
2. colocando a fonte em curto e calculando R_N :



$$R_N = 30//10$$

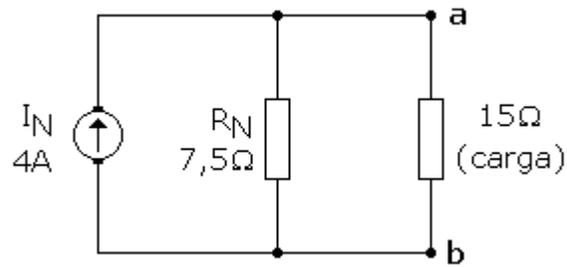
$$R_N = \frac{30 \cdot 10}{30+10} = \frac{300}{40} = 7,5\Omega$$

3. eliminando o curto da fonte, colocando os pontos a e b em curto (carga), podemos calcular I_N :



$$I_N = \frac{40}{4} = 4A$$

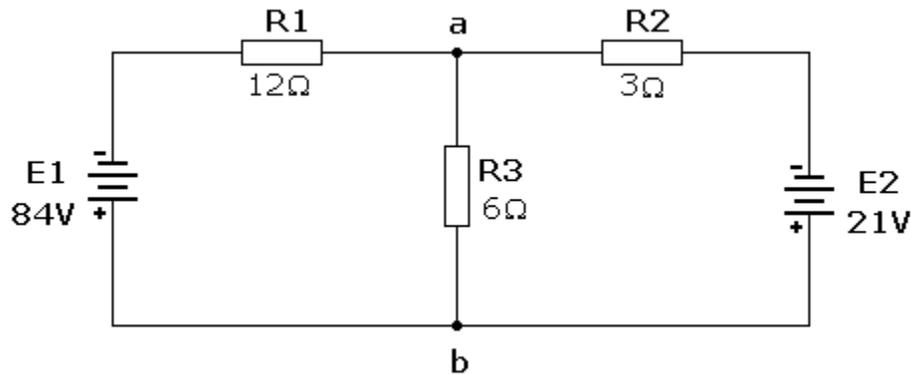
4. desenhando o equivalente de Norton e calculando a tensão na carga:



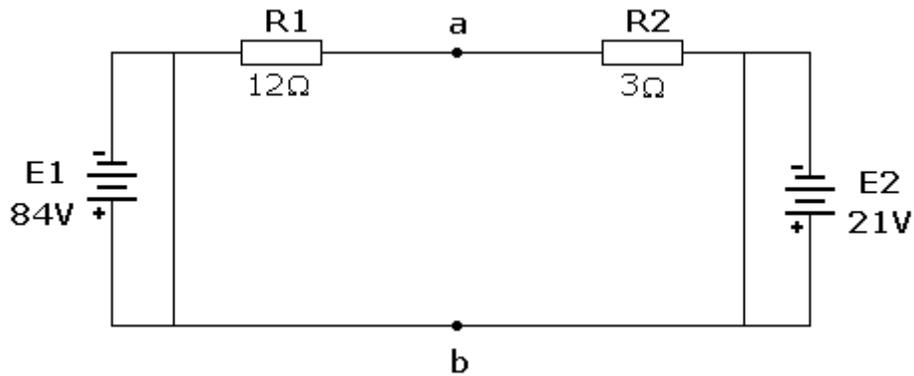
$$\text{Corrente na carga} = \frac{4 \cdot 7,5}{7,5 + 15} = \frac{30}{22,5} = 1,333\text{A}$$

$$\text{Tensão na carga} = 15 \cdot 1,333 = 19,995\text{V} \approx 20\text{V}$$

EXEMPLO 4: No circuito a seguir calcular a tensão nos extremos do resistor R_3 (pontos a e b) e a corrente que circula pelo mesmo, usando o teorema de Norton (*este exercício foi resolvido no capítulo anterior pelo método de Thévenin*):



1. cálculo de R_N :

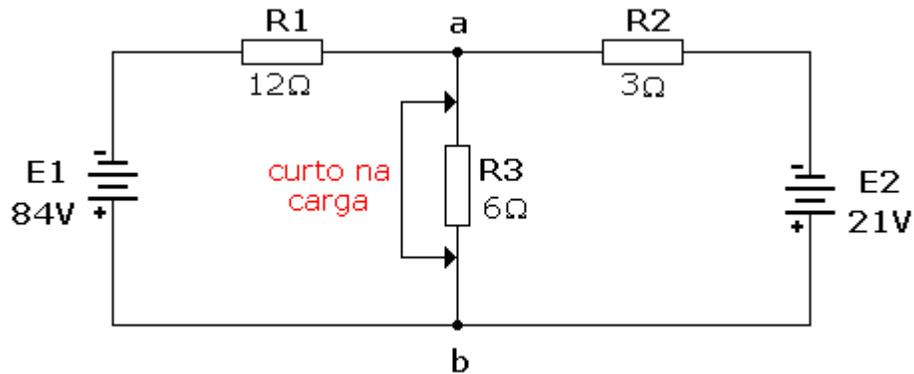


Com E1 e E2 em curto, teremos entre os pontos *a* e *b* os resistores R1 e R2 em paralelo.

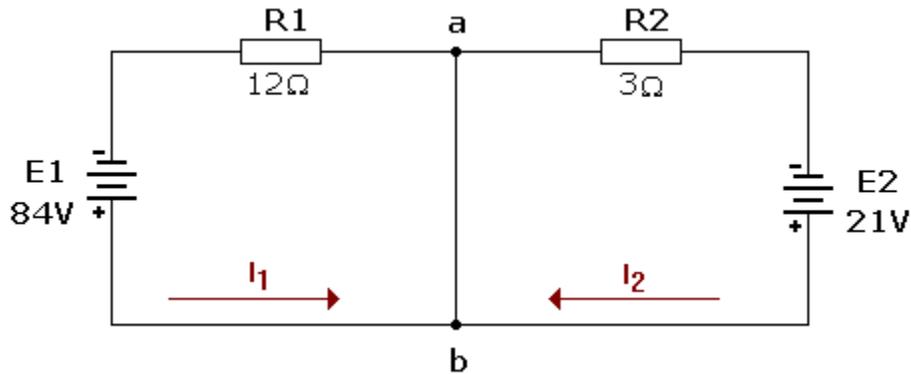
$$\text{Assim } R_N = \frac{12 \cdot 3}{12 + 3} = \frac{36}{15} = 2,4\Omega$$

2. cálculo de I_N :

Colocando a carga em curto:



Com a carga em curto, resulta nas correntes I_1 e I_2 provenientes das fontes E1 e E2 respectivamente.



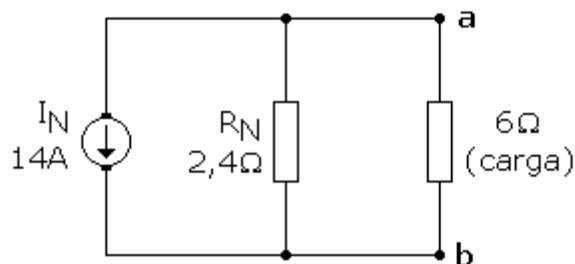
As correntes I_1 e I_2 circularão entre os pontos a e b , e como estão no mesmo sentido serão somadas.

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{-84}{12} = -7A$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{-21}{3} = -7A$$

$$\text{Portanto: } I_N = -7A + (-7A) = -14A$$

3. circuito equivalente de Norton



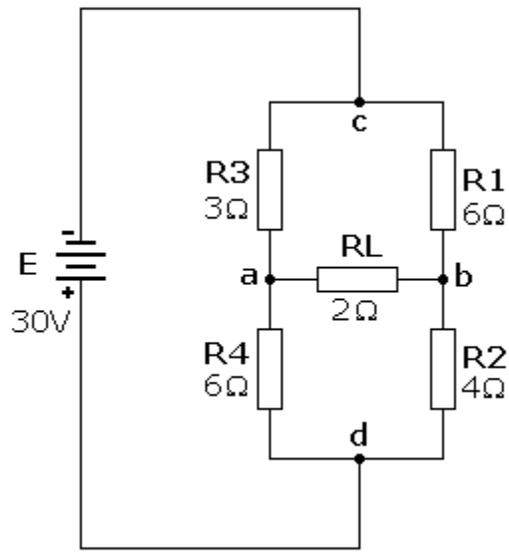
Corrente na carga:

$$I(\text{carga}) = \frac{14 \cdot 2,4}{6 + 2,4} = \frac{33,6}{8,4} = 4A$$

Tensão na carga:

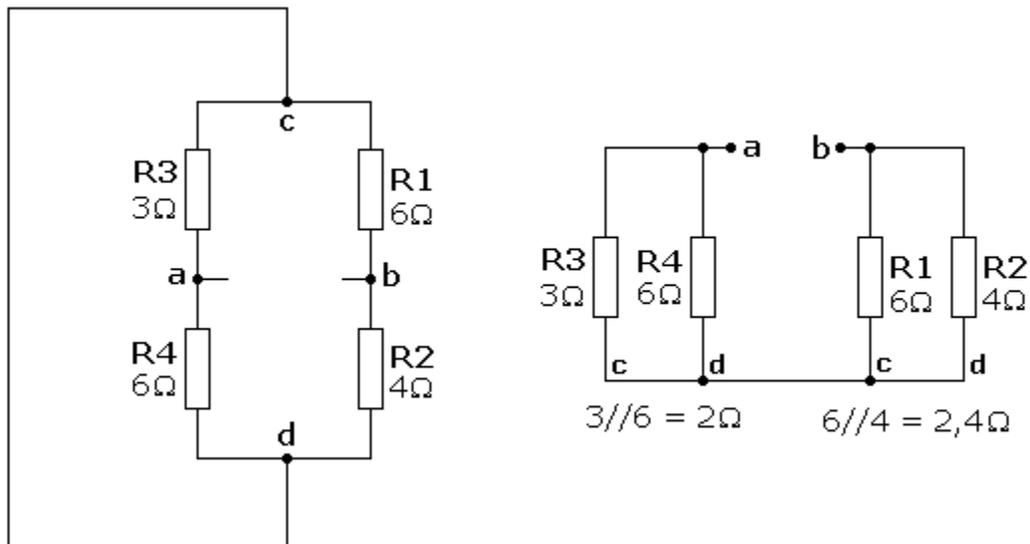
$$E(\text{carga}) = R \cdot I = 6 \cdot 4 = 24V$$

EXEMPLO 5: Calcular no circuito a seguir a tensão e a corrente na carga (RL) utilizando o teorema de Norton (*este exercício foi resolvido no capítulo anterior pelo método de Thévenin*):

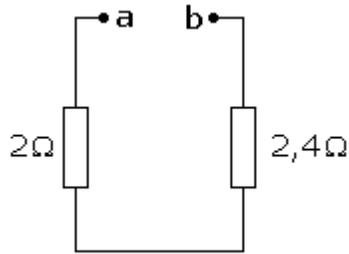


1. cálculo de R_N :

Colocando E em curto, teremos:

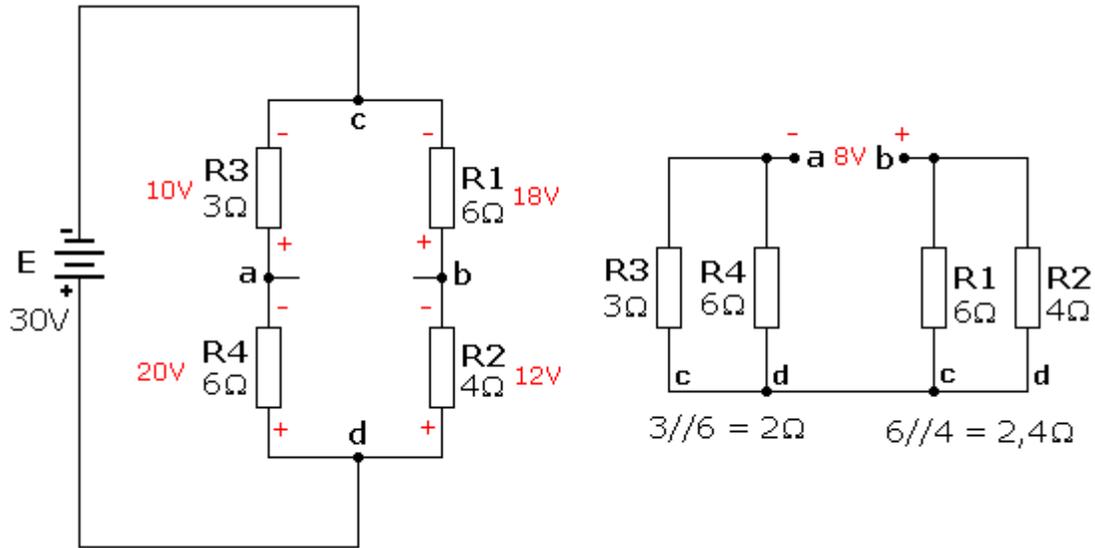


$R_N = 2 + 2,4 = 4,4\Omega$, pois as associações $R3//R4$ e $R1//R2$ ficam em série, conforme ilustra a figura a seguir:



2. cálculo de I_N :

Para calcular I_N , devemos calcular a tensão entre os pontos a e b , sem a carga. Essa tensão é a tensão de Thévenin.

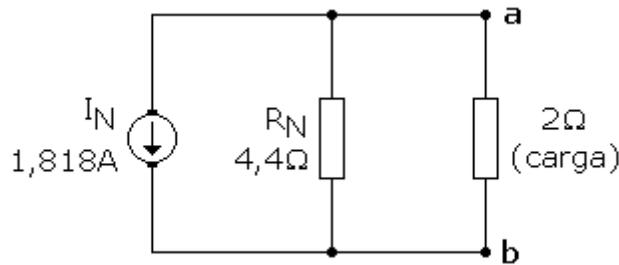


Observa-se que o ponto a é mais negativo do que o ponto b , considerando o ponto d como referência (aterrado).

A resistência equivalente entre os pontos a e b será então: $2\Omega + 2,4\Omega = 4,4\Omega$.

$$I_N = \frac{-8}{4,4} = -1,818A$$

Circuito equivalente de Norton



Corrente na carga:

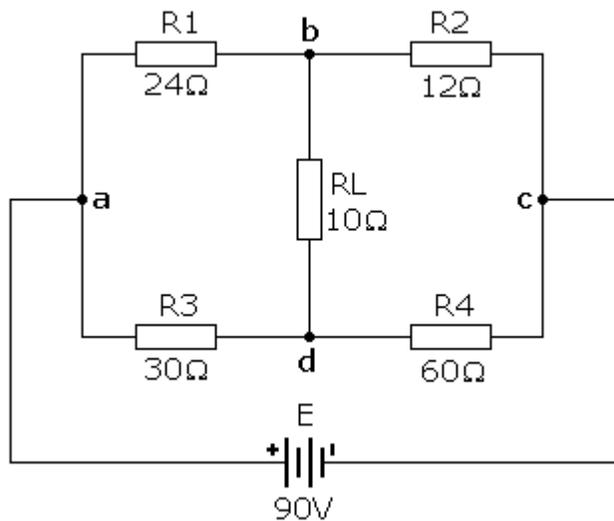
$$I (\text{carga}) = \frac{-1,818 \cdot 4,4}{4,4 + 2} = \frac{-7,992}{6,4} = -1,24875 \approx -1,25\text{A}$$

Tensão na carga:

$$E (\text{carga}) = 2 \cdot -1,25 = -2,5\text{V}$$

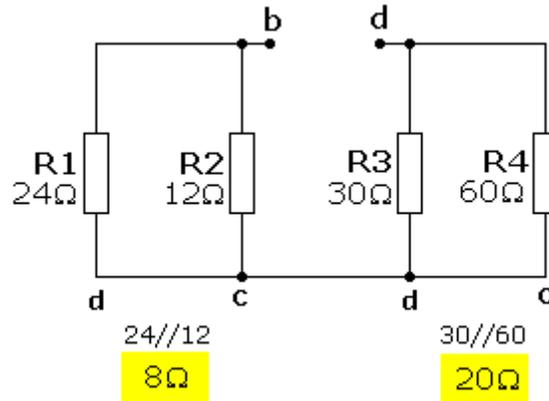
EXERCÍCIO:

No circuito abaixo, calcule a tensão e a corrente na carga R_L , aplicando os teoremas de Thévenin e Norton e faça a comparação dos resultados.



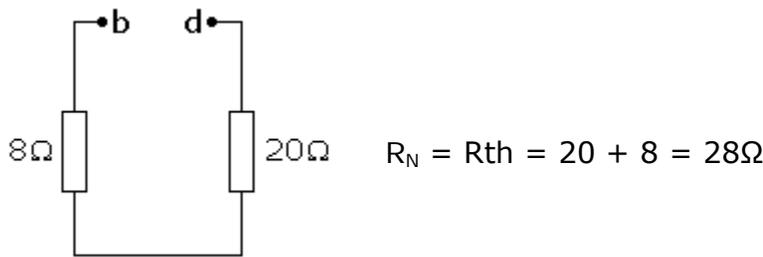
1. calculando a resistência equivalente de Thévenin e Norton:

Lembrando que o processo é o mesmo para o cálculo de R_N e R_{th}



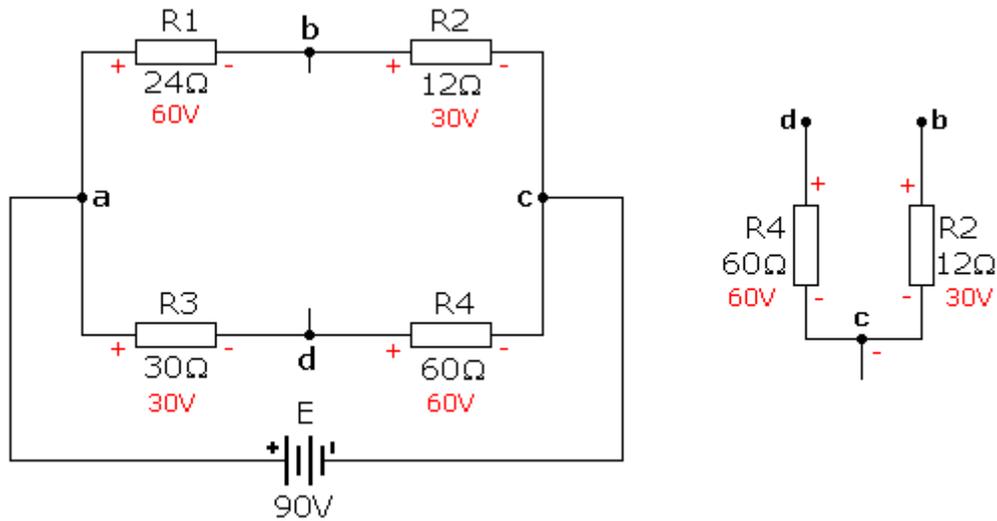
$$24//12 = \frac{24 \cdot 12}{24 + 12} = \frac{288}{36} = 8\Omega$$

$$30//60 = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = \frac{1800}{90} = 20\Omega$$



2. calculando V_{th}:

Retira-se a carga e calcula-se a tensão em cada resistor:

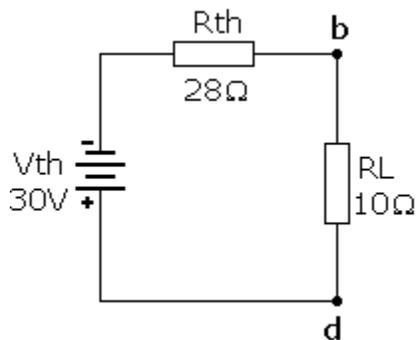


Considerando o ponto c como referência, teremos então o ponto b menos positivo do que o ponto d , assim:

$$V_{th} = - 30V$$

3. circuito equivalente de Thévenin:

O circuito equivalente de Thévenin é mostrado a seguir:

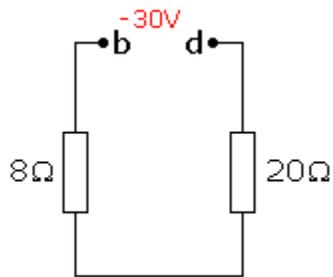


$$\text{Corrente na carga: } 30 / 38 = 789,47\text{mA}$$

$$\text{Tensão na carga: } 10 \cdot 789,47\text{mA} = 7,895\text{V}$$

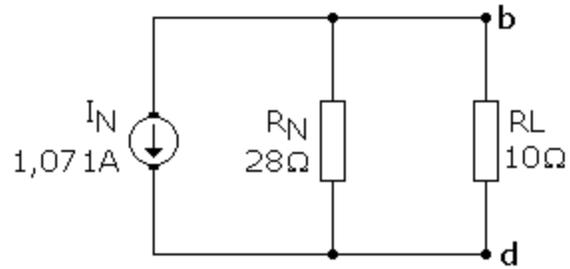
4. calculando I_N :

Partindo da tensão de Thévenin - 30V, podemos calcular a corrente de Norton:



$$I_N = -30 / 28 = - 1,071\text{A}$$

5. circuito equivalente de Norton:



Corrente na carga: $\frac{1,071 \cdot 28}{28 + 10} = \frac{29,988}{38} = 789,158 \text{mA}$

Tensão na carga: $10 \cdot 789,158 \text{mA} = 7,892 \text{V}$